



附录

答案及解析



第1章 三角函数

第1节 三角函数的定义、同角三角函数的基本关系及诱导公式



题型上分练

1. D 【解析】因为 $P(\sin \theta, \cos \theta)$ 是角 $\frac{5\pi}{3}$ 终边上的一点, 所以点 P 易错点

的坐标为 $(\cos \frac{5\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3})$, 所以 $\sin \theta = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos \theta =$

$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 D.

2. C 【解析】依题意, 得 $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{3}$, 且 $x < 0$ (提示: 第

二象限角), 解得 $x = -2\sqrt{2}$, 则 $\tan \alpha = \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. 故选 C.

3. C 【解析】分针每 60 分钟转一周, 每分钟转过的弧度数为 $\frac{2\pi}{60}$, 故经过 25 分钟, 分针的端点所转过的弧度数为 $\frac{2\pi}{60} \times 25 =$

$\frac{5\pi}{6}$, 所转过的弧长约为 $\frac{5\pi}{6} \times 4 = \frac{10\pi}{3}$ (米). 故选 C.

4. B 【解析】角 α 的终边在直线 $y=2x$ 上, 所在象限有两种可能, 要分类讨论. 直线 $y=2x$ 过第一象限和第三象限.

若角 α 的终边在第一象限, 可取终边上一点 $(1, 2)$, 则 $\sin \alpha =$

$$\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{则 } 5\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cos \alpha - 2 = 5 \times \frac{4}{5} + 3 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - 2 = \frac{16}{5}.$$

若角 α 的终边在第三象限, 可取终边上一点 $(-1, -2)$, 则 $\sin \alpha =$

$$\frac{-2}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 则}$$

$$5\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cos \alpha - 2 = 5 \times \frac{4}{5} + 3 \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - 2 = \frac{16}{5}.$$

故选 B.

一题多解 设直线 $y=2x$ 上一点为 $(m, 2m)$ ($m \neq 0$), 因为

角 α 的终边在直线 $y=2x$ 上, 所以 $\tan \alpha = \frac{2m}{m} = 2$,

则 $5\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cos \alpha - 2$

$$= 5\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cos \alpha - 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$



$$\begin{aligned}
 &= 3\sin \alpha \cos \alpha + 3\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha \\
 &= \frac{3\sin \alpha \cos \alpha + 3\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\
 &= \frac{3\tan \alpha + 3\tan^2 \alpha - 2}{\tan^2 \alpha + 1} \\
 &= \frac{3 \times 2 + 3 \times 2^2 - 2}{2^2 + 1} = \frac{16}{5}.
 \end{aligned}$$

5. D 【解析】先通过条件确定 α 的范围,再求出 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围,进

而可得角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在象限. 因为 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$, 所以 α

为第二象限角, 即 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} <$

$\frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 则角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在象限为 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$,

$\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$ 所在象限, 即角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一、二、四

象限. 故选 D.

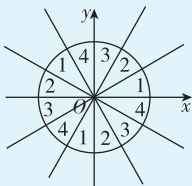
快解 因为 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$, 所以 α 为第二象限角. 根据

象限角等分原理将各个象限 3 等分,

依次标注数字 1, 2, 3, 4, 图中标注数

字 2 的区域所在的象限即为角 $\frac{\alpha}{3}$ 的

终边所在象限, 即第一、二、四象限.



6. C 【解析】因为 α 为第一象限角, 所以 $2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in$

$\mathbf{Z}$, 则 $4k\pi < 2\alpha < \pi + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\sin 2\alpha > 0$; 由 $\sin 2\alpha > 0$, 得

$2k_1\pi < 2\alpha < \pi + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$, 则 $k_1\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$, 故 α 为

第一、三象限角. 所以“ α 为第一象限角”是“ $\sin 2\alpha > 0$ ”的充分不必要条件. 故选 C.

7. D 【解析】(单位圆法) 如图, 根

据三角函数定义, 在单位圆上先

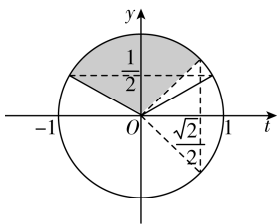
找到纵坐标为 $\frac{1}{2}$ 的点, 从而可知

当 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 时, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$,

同理, 再找到横坐标为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点, 从而可知当 $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $x \in$

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, 其公共区域如图中阴影部分所示, 故 $x \in$

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$. 故选 D.





一题多解 根据正弦曲线与余弦曲线分别求出满足题干条件的 x 的范围,再求交集. 因为 $0 \leq x \leq 2\pi$, 由正弦曲线得

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ 时, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, 由余弦曲线得 $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, 因为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cap \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$, 所

以使 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 且 $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 同时成立的 x 的取值范围是

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

8. ABD 【解析】对于 A, $\because 2, 3$ 弧度的角均为第二象限角, $\therefore \cos 2 < 0, \sin 3 > 0, \therefore \cos 2 \sin 3 < 0$, **A 正确**.

对于 B, 设扇形的半径为 r , 则 $\frac{\pi}{3}r = \pi$, 解得 $r = 3$, $\therefore$ 扇形的面积

$S = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 3^2 = \frac{3\pi}{2}$, **B 正确**.

对于 C, 终边落在直线 $y = x$ 上的角的集合为

$\left\{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ (易错: 易忽略第三象限角), **C 错误**.

对于 D, 由 $2x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 得 $x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

又 $\tan\left[2(x+\pi) - \frac{\pi}{6}\right] = \tan\left(2\pi + 2x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore \pi$

为该函数的一个周期, **D 正确**. 故选 ABD.

9. 0, $\pm 1, \pm 2$ 【解析】已知点 $A(1, a) (a \in \mathbf{Z})$ 在角 θ 的终边上, 且原点坐标为 $(0, 0)$, 由两点确定一条直线, 可知终边所在象限有两种可能 (提示: 题型攻略【题型 1】(3)), 故存在多解.

由 $|OA| \leq 3$, 即 $1 + a^2 \leq 9$, 解得 $-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$,

又 $a \in \mathbf{Z}$, 故 a 的值可为 $-2, -1, 0, 1, 2$.

由 $\tan \theta = \frac{a}{1} = a$, 知 $\tan \theta$ 的值为 $0, \pm 1, \pm 2$.

10. A 【解析】因为 $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - 1} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1} = -1$,

且 $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = -\sqrt{3}$, 所以 $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

11. B 【解析】由 $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{5}$, 且 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$,

$$\text{解得} \begin{cases} \sin \theta = \frac{3}{5}, \\ \cos \theta = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \sin \theta = -\frac{4}{5}, \\ \cos \theta = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

又因为 θ 为第三象限角, 所以 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$,

$$\text{所以} \begin{cases} \sin \theta = -\frac{4}{5}, \\ \cos \theta = -\frac{3}{5}, \end{cases}$$



$$\text{所以 } \frac{\cos \theta (1-2\sin^2 \theta)}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5} \times \left[1 - 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2\right]}{-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}} = -\frac{3}{25}.$$

故选 B.

12. B 【解析】因为 $\sin \beta + \cos \beta = -\frac{1}{5}, \beta \in (0, \pi)$,

$$\text{所以 } (\sin \beta + \cos \beta)^2 = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta + 2\sin \beta \cos \beta = \frac{1}{25},$$

$$\text{所以 } 2\sin \beta \cos \beta = -1 + \frac{1}{25} = -\frac{24}{25} < 0,$$

所以 $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin \beta > 0, \cos \beta < 0$, 故 $\sin \beta - \cos \beta > 0$ (注

意: 先判断 $\sin \beta - \cos \beta$ 的符号, 开平方时需要取舍).

$$\text{又因为 } (\sin \beta - \cos \beta)^2 = 1 - 2\sin \beta \cos \beta = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25},$$

$$\text{所以 } \sin \beta - \cos \beta = \frac{7}{5}. \text{ 故选 B.}$$

13. B 【解析】因为 $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \alpha$ 为第二象限角, 所以 $\cos \alpha =$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 则 } \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ 故选 B.}$$

14. A 【解析】由题意得 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2} \tan \alpha$, 解得

$$\tan \alpha = -\frac{1}{3} \text{ 或 } \tan \alpha = 2.$$

$$\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan^2 \alpha + 1},$$

$$\text{当 } \tan \alpha = -\frac{1}{3} \text{ 时, } \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{-\frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{9} + 1} = \frac{3}{5};$$

$$\text{当 } \tan \alpha = 2 \text{ 时, } \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{2+1}{4+1} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{综上所述, } \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{3}{5}. \text{ 故选 A.}$$

15. D 【解析】因为 $\sin \alpha, \sin \beta$ 是方程 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ 的两个根,

$$\text{所以 } \sin \alpha + \sin \beta = -\frac{1}{2}, \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{4},$$

$$\text{又 } \alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } \cos \alpha > 0, \cos \beta > 0.$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta)}$$

$$= \sqrt{1 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

$$= \sqrt{1 - (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 2\sin \alpha \sin \beta + (\sin \alpha \sin \beta)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4},$$



所以 $\tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

16. -2 【解析】因为 $\frac{3\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = 2$, 所以 $\frac{3\tan \theta - 1}{1 + \tan \theta} = 2$, 即

$\tan \theta = 3$ (另解: 因为 $\frac{3\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = 2$, 所以 $3\sin \theta - \cos \theta =$

$2\cos \theta + 2\sin \theta$, 即 $\sin \theta = 3\cos \theta$, 即 $\tan \theta = 3$), 所以

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{3+1}{1-3} = -2 \text{ (提示: 两角和的正切}$$

公式).

17. B 【解析】 $\tan 240^\circ + \sin 300^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) + \sin(360^\circ -$

$60^\circ) = \tan 60^\circ - \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.

18. C 【解析】 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{-\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = -\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha + 1} =$

-2. 故选 C.

19. D 【解析】 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] =$

$$\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \times$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8} \text{ (提示: 二倍角的余弦公式)}. \text{ 故选 D.}$$

20. $-\frac{1}{3}$ 【解析】由题意可得 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$, 则角 α 的终边

按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与单位圆交点的横坐标为

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

21. 【解】(1) 根据任意角的三角函数定义可得 $\tan \alpha = \frac{2}{1} = 2$.

(2) (齐次化法) 由 (1) 知 $\tan \alpha = 2$, 所以

$$\frac{\sin(\pi - \alpha) + 5\cos(2\pi - \alpha)}{2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha + 5\cos \alpha}{-2\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha + 5}{-2 - \tan \alpha} = -$$

$$\frac{7}{4}.$$

(3) 由 (1) 知 $\tan \alpha = 2$, 所以 $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha =$

$$\frac{\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + 2\tan \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{7}{5}.$$



一题多解 (2) (定义法) 根据任意角的三角函数定义可得

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \left(\text{提示: 若角 } \alpha \text{ 的} \right.$$

$$\text{终边过点 } Q(x, y) (x \neq 0), \text{ 则 } \sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha =$$

$$\frac{y}{x}, \text{ 其中 } r = \sqrt{x^2+y^2} \left. \right), \text{ 所以 } \frac{\sin(\pi-\alpha)+5\cos(2\pi-\alpha)}{2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} =$$

$$\frac{\sin \alpha + 5\cos \alpha}{-2\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 5 \times \frac{\sqrt{5}}{5}}{-2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{7}{4}.$$

$$(3) \text{ 由 } (2) \text{ 知 } \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 + 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} - \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \frac{7}{5}.$$

22. 【解】 (1) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) + \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \sin\left[\pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] + \cos\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}.$$

$$(2) \because \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{则 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{3}.$$

$$(i) \frac{2\sin \theta + 3\cos \theta}{3\sin \theta - 2\cos \theta} = \frac{2\tan \theta + 3}{3\tan \theta - 2} = \frac{2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 3}{3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 2} = -\frac{7}{9}.$$

$$(ii) \frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) \tan(\pi - \theta)}{\tan(-\theta - \pi) \sin(-\theta - \pi)}$$

$$= \frac{-\cos \theta \sin \theta (-\tan \theta)}{-\tan \theta \sin \theta}$$

$$= -\cos \theta$$

$$= -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$



第2节 三角恒等变换



题型上分练

1. C 【解析】因为 $\tan(\alpha+\beta)=1$, $\tan \beta=\frac{1}{3}$, 所以 $\tan \alpha=\tan(\alpha+\beta-\beta)$.

$$\beta-\beta)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan \beta}{1+\tan(\alpha+\beta) \tan \beta}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+1 \times \frac{1}{3}}=\frac{1}{2} \text{ (提示: } \alpha=\alpha+\beta-\beta \text{)}. \text{ 故}$$

选 C.

2. B 【解析】通过观察可知 $\theta+\frac{\pi}{3}=\theta+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$, 再通过两角和

的正弦公式可求解, 过程中要注意角的范围对三角函数值符

号的影响. 由 $-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, 可得 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta+\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, 又

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 故 } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6}+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2}=\frac{3+\sqrt{6}}{6}. \text{ 故选 B.}$$

方法总结 在解三角函数化简求值的题时, 常常按照“角—名—公式”的顺序来思考解题. 对于“角”, 一般从角的关系(和、差、倍数及与特殊角的关系)和角的范围(已知范围、由三角函数值符号缩小角的范围、根据三角函数值与特殊角三角函数值的大小限定角的范围)去处理.

3. D 【解析】由题意得 $\sin(2\alpha+\beta)=\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]=$

$$\sin \alpha \cos(\alpha+\beta)+\cos \alpha \sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}, \cos \alpha \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}, \text{ 则}$$

$$\tan \alpha+\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin \alpha \cos(\alpha+\beta)+\cos \alpha \sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos(\alpha+\beta)}=\frac{4}{3} \text{ (关键:}$$

建立已知与未知之间的联系). 故选 D.

4. D 【解析】 $\cos 50^{\circ}=\cos(90^{\circ}-40^{\circ})=\sin 40^{\circ}$,

同理可得 $\cos 70^{\circ}=\sin 20^{\circ}$.

$$\sin^2 40^{\circ}+\sin^2 20^{\circ}+\cos 50^{\circ} \cos 70^{\circ}=\sin^2 40^{\circ}+\sin^2 20^{\circ}+\sin 40^{\circ} \sin 20^{\circ}=$$

$$\sin^2(60^{\circ}-20^{\circ})+\sin^2 20^{\circ}+\sin(60^{\circ}-20^{\circ}) \sin 20^{\circ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^{\circ}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2} \sin 20^{\circ}\right)^2+\sin^2 20^{\circ}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^{\circ}-\frac{1}{2} \sin 20^{\circ}\right) \sin 20^{\circ}=$$

$$\frac{3}{4} \cos^2 20^{\circ}+\frac{1}{4} \sin^2 20^{\circ}-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^{\circ} \cos 20^{\circ}+\sin^2 20^{\circ}+$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^{\circ} \cos 20^{\circ}-\frac{1}{2} \sin^2 20^{\circ}=\frac{3}{4}(\cos^2 20^{\circ}+\sin^2 20^{\circ})=\frac{3}{4}.$$

故选 D.

5. B 【解析】因为点 $P(3,15)$ 是角 $\theta+\frac{\pi}{4}$ 终边上的一点, 所以



$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{15}{3} = 5,$$

$$\text{所以 } \tan \theta = \tan \left[\left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan \frac{\pi}{4}} =$$

关键点

$$\frac{5-1}{1+5 \times 1} = \frac{2}{3}. \text{ 由 } \tan \theta = \frac{2}{3} \text{ 可知 } \cos \theta \neq 0,$$

$$\text{所以 } \frac{\sin 2\theta}{2\cos^2 \theta - 3\sin^2 \theta} = \frac{2\sin \theta \cos \theta}{2\cos^2 \theta - 3\sin^2 \theta} = \frac{2\tan \theta}{2-3\tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2-3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} =$$

2. 故选 B.

6. C 【解析】 $\because \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2},$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}, \textcircled{1}$$

$$\because \tan \alpha = 3 \tan \beta, \therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 \sin \beta}{\cos \beta} \text{ (提示: 切化弦),}$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = 3 \cos \alpha \sin \beta, \textcircled{2}$$

$$\text{联立 } \textcircled{1} \textcircled{2}, \text{ 可得 } \sin \alpha \cos \beta = \frac{3}{4}, \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 1.$$

$$\because \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \alpha + \beta \in (0, \pi), \text{ 故 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \text{ 故选 C.}$$

7. AC 【解析】对于 A, $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$

$$\frac{\sqrt{10}}{50} + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以 } \sin \alpha \sin \beta = \frac{7\sqrt{10}}{25}, \text{ 故 A 正确.}$$

$$\text{对于 B, } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{50} - \frac{7\sqrt{10}}{25} =$$

$$-\frac{13\sqrt{10}}{50}, \text{ 故 B 错误.}$$

$$\text{对于 C, } \tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\frac{7\sqrt{10}}{25}}{\frac{\sqrt{10}}{50}} = 14, \text{ 故 C 正确.}$$

$$\text{对于 D, } \sin 2\alpha \sin 2\beta = 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot 2\sin \beta \cos \beta = 4\sin \alpha \sin \beta \cdot$$

$$(\cos \alpha \cos \beta) = 4 \times \frac{7\sqrt{10}}{25} \times \frac{\sqrt{10}}{50} = \frac{28}{125}, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 AC.

8. $\frac{7\pi}{4}$ 【解析】因为 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, 所以 $2\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$,

$$\text{又 } \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0, \text{ 所以 } 2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\text{则 } \cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{因为 } \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \text{ 所以 } \beta - \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right),$$

$$\text{又 } \sin(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以 } \beta - \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$



$$\text{则 } \cos(\beta-\alpha) = -\sqrt{1-\sin^2(\beta-\alpha)} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha+\beta) = \cos[(\beta-\alpha)+2\alpha]$$

$$= \cos(\beta-\alpha)\cos 2\alpha - \sin(\beta-\alpha)\sin 2\alpha$$

$$= \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又 } \alpha+\beta \in \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right), \text{ 所以 } \alpha+\beta = \frac{7\pi}{4}.$$

关键点拨 角 2α 除了通过已知得到角的范围外,还可以通过三角函数值的符号缩小角的范围,后面 $\beta-\alpha$ 的范围也是如此缩小的. 此外我们还可以通过三角函数值与特殊角的三角函数值的大小来限制角的范围,例如,当 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ 时,由 $\frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 从而将 α 的范围缩小至 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

9. $\sqrt{3}$ 【解析】 $\because \sin \alpha = \lambda \sin \beta, \therefore \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \lambda \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

关键点

$$\frac{\alpha-\beta}{2}), \text{ 即 } (\lambda-1) \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = (\lambda+1) \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\text{由题可知 } \lambda > 0, \text{ 且 } \lambda \neq 1, \text{ 则 } \alpha \neq \beta, \therefore \tan \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \tan \frac{\alpha-\beta}{2}, \text{ 又}$$

$$\tan \frac{\alpha+\beta}{2} = (\lambda+2) \tan \frac{\alpha-\beta}{2}, \therefore \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \lambda+2, \text{ 解得 } \lambda = \sqrt{3} \text{ 或 } \lambda = -\sqrt{3}$$

$$(\text{舍去}), \therefore \lambda = \sqrt{3}.$$

10. $\frac{7\pi}{18}$ 【解析】因为 $2\sin \frac{\pi}{9} \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{9}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{9} - \left(\alpha - \frac{2\pi}{9}\right)\right] -$

关键点

$$\cos\left[\frac{\pi}{9} + \left(\alpha - \frac{2\pi}{9}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{9}\right),$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{9}\right), \text{ 即 } \cos \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{9}\right),$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{9}\right).$$

$$\text{又因为 } 0 < \alpha < \pi,$$

$$\text{所以当 } 0 < \alpha \leq \frac{2\pi}{9} \text{ 时, } 2\sin \frac{\pi}{9} \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{9}\right) \leq 0, \text{ 不合题意;}$$

$$\text{当 } \frac{2\pi}{9} < \alpha < \pi \text{ 时, } \cos \alpha = 2\sin \frac{\pi}{9} \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{9}\right) > 0, \text{ 则 } \frac{2\pi}{9} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} < \pi, \frac{\pi}{9} < \alpha - \frac{\pi}{9} < \frac{7\pi}{18} < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{由 } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{9}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 得到 } \alpha - \frac{\pi}{9} + \alpha + \frac{\pi}{3} = \pi, \text{ 解得}$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{18}.$$



11. C 【解析】由 $\sqrt{5} \sin \alpha = \tan \alpha$, 得 $\sqrt{5} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. 又 $\alpha \in$

$(0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin \alpha > 0$, 所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha -$

$1 = -\frac{3}{5}$. 故选 C.

12. D 【解析】已知 $\sin \theta - 2\cos \theta = 2$, 即 $\sin \theta = 2(\cos \theta + 1)$, 又

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, θ 为第二象限角, 所以 $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta =$

$$-\frac{3}{5}, \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1} = \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = 2 \text{ (提示: 半角公式)}. \text{ 故选 D.}$$

13. D 【解析】依题意, $\frac{\tan 81^\circ}{1 + \tan^2 81^\circ} = \frac{\frac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ}}{1 + \frac{\sin^2 81^\circ}{\cos^2 81^\circ}} = \frac{\sin 81^\circ \cos 81^\circ}{\sin^2 81^\circ + \cos^2 81^\circ} =$

$$\frac{1}{2} \sin 162^\circ = \frac{1}{2} \sin 18^\circ = \frac{m}{4}. \text{ 故选 D.}$$

14. A 【解析】因为 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} =$

$$\frac{1}{3} \text{ (提示: 降幂公式)}, \text{ 所以 } \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1}{3 \sin \frac{\theta}{2}} =$$

0. 故选 A.

15. B 【解析】因为 $\sin \beta \cos(\alpha - \beta) - \cos \beta \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos(\alpha - \beta) + \cos \beta \sin(\alpha - \beta)$ (提示: 化异角为同角) $= \sin[\beta + (\alpha -$

$\beta)] = \sin \alpha = \frac{4}{5}$, 又 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} =$

$$-\frac{3}{5}, \text{ 所以 } \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{3}{4}. \text{ 故选 B.}$$

16. B 【解析】 $\tan \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = 2 \tan \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{5}$,

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos \frac{2\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5}, \text{ 于是 } \tan \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} +$$

$$\sin \frac{\pi}{10} = 1. \text{ 故选 B.}$$

17. A 【解析】本题涉及二倍角以及已知角与常用角的关系.

$$\text{观察可得 } \left(2\alpha + \frac{\pi}{10}\right) - 2\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{因为 } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}, \text{ 所以 } \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} +$$

$$2\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right)\right] = \cos\left(2\alpha - \frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2 \times$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}. \text{ 故选 A.}$$



18. C 【解析】由 $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\lambda}{\cos 10^\circ} = 4$,

$$\begin{aligned} \text{可得 } \lambda &= \left(\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \right) \cos 10^\circ = \frac{\cos 10^\circ - 4 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \\ &= \frac{\cos 10^\circ - 2 \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - 2 \sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ} = \\ &= \frac{\cos 10^\circ - 2 \times \frac{1}{2} \cos 10^\circ + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \sqrt{3}. \text{ 故选 C.} \end{aligned}$$

19. B 【解析】由 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{17}$ 得 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 +$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{49}{289}, \text{ 所以 } 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{240}{289} < 0, \text{ 又 } \alpha \in$$

$$\left(0, \frac{3\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 所以 } \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0.$$

关键点

$$\text{所以 } 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{529}{289}, \text{ 所以 } \sin \alpha -$$

$$\cos \alpha = \frac{23}{17}, \text{ 又 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{17}, \text{ 所以 } \sin \alpha = \frac{15}{17}, \cos \alpha = -\frac{8}{17},$$

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{15}{8},$$

$$\text{所以 } \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = -\frac{15}{8}, \text{ 化简得 } \left(5 \tan \frac{\alpha}{2} + 3\right) \left(3 \tan \frac{\alpha}{2} - 5\right) =$$

$$0, \text{ 解得 } \tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5} \text{ 或 } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{因为 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 所以 } \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{3}. \text{ 故}$$

关键点

选 B.

20. A 【解析】由 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{12}{5}$ 得 $10 \tan \theta = 12 - 12 \tan^2 \theta$,

$$\text{解得 } \tan \theta = \frac{2}{3} \text{ 或 } \tan \theta = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{因为 } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 所以 } \tan \theta < 0, \text{ 故 } \tan \theta = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{所以 } \frac{\sin 2\theta - \cos^2 \theta}{\cos 2\theta + 4 \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta} =$$

$$\frac{2 \tan \theta - 1}{1 + 3 \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 1}{1 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-4}{1 + \frac{27}{4}} = -\frac{16}{31}. \text{ 故选 A.}$$

21. B 【解析】由 $3 \sin \alpha = 4(1 - \cos \alpha)$, 根据二倍角公式可得 $3 \times$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 4 \times \left[1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right],$$

$$\text{化简得 } 6 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{因为 } \alpha \text{ 是锐角, 所以 } 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } \sin \frac{\alpha}{2} > 0,$$



等式两边同时除以 $2\sin \frac{\alpha}{2}$, 可得 $3\cos \frac{\alpha}{2} = 4\sin \frac{\alpha}{2}$, ①

又 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$, ②

联立①②, 可得 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{4}{3}\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1$, 解得 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{25}$.

则 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$. 故选 B.

22. 2 【解析】 $\frac{5+\sin 10^\circ}{3-\cos^2 50^\circ} = \frac{5+\sin 10^\circ}{3-\frac{1+\cos 100^\circ}{2}} = \frac{5+\sin 10^\circ}{\frac{5}{2}-\frac{\cos 100^\circ}{2}} =$

$\frac{5+\sin 10^\circ}{\frac{5+\sin 10^\circ}{2}} = 2$ (提示: 遇到正、余弦的二次幂, 首先考虑降幂).

23. $\frac{7}{9}$ 【解析】 由 $\sin \alpha \tan \beta = 1 - \cos \alpha$, 得 $\sin \alpha \sin \beta = \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta$, 因此 $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) = \cos \beta$.
又 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha - \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以由 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3} > 0$ 知 $\alpha - \beta = \beta$, 即 $\alpha = 2\beta$, 则 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta = \frac{7}{9}$.

一题多解

由 $\sin \alpha \tan \beta = 1 - \cos \alpha$, 得 $\tan \beta = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$, 结合 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\alpha}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\frac{\alpha}{2} = \beta$, $\alpha = 2\beta$,
则 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta = \frac{7}{9}$.

24. C 【解析】 $\cos 15^\circ - \sqrt{3} \sin 345^\circ = \cos 15^\circ - \sqrt{3} \sin(360^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ - \sqrt{3} \sin(-15^\circ) = \cos 15^\circ + \sqrt{3} \sin 15^\circ = 2\sin(15^\circ + 30^\circ) = 2\sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. 故选 C.

25. A 【解析】 由 $\cos \alpha - 2\sin \beta = 1$ 两边平方可得 $\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha \sin \beta + 4\sin^2 \beta = 1$, ①
由 $\sin \alpha + 2\cos \beta = -\sqrt{2}$ 两边平方可得 $\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \beta + 4\cos^2 \beta = 2$, ②
由①+②得 $1 + 4(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) + 4 = 3$, 整理得 $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$.

又 $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{6}$, 即 $\alpha = \beta - \frac{\pi}{6}$, 将其代入

$\cos \alpha - 2\sin \beta = 1$, 可得 $\cos\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta +$

$\frac{1}{2} \sin \beta - 2\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta - \frac{3}{2} \sin \beta = \sqrt{3} \cos\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, 故

$\cos\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.



26. A 【解析】因为 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$,

$$\text{所以 } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

又 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 可得 $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$$\sqrt{1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 则 } \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 3,$$

$$\text{所以 } \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \pi\right] = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3.$$

故选 A.

27. C 【解析】 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right)$

$$= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1 - \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left[\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{4} = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{11}{20}. \text{ 故选 C.}$$

关键点拨

通过 $\theta - \frac{\pi}{12} = \theta + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$ 将待求的两个未知角化

为一个未知角与一个已知角 $\frac{\pi}{6}$ 是解题的关键.



综合提分练

1. A 必刷知识 ① 降幂公式

$$\text{【解析】} \sin^2 \frac{5\pi}{24} + \cos^2 \frac{\pi}{24} = \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{12}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{12}}{2} = 1 +$$

$$\frac{\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}}{2} = 1 + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)}{2} = 1 + \sin \frac{\pi}{4}.$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ 故选 A.}$$

2. C 必刷知识 ② 半角的余弦公式

【解析】由题得 $\cos \beta \cos(\alpha - \beta) + \sin \beta \sin(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos(\alpha -$

$$\beta) - \sin \beta \sin(\alpha - \beta) = \cos(\beta + \alpha - \beta) = \cos \alpha = -\frac{1}{9},$$

$$\text{又 } 0 < \alpha < \pi, \text{ 所以 } 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

**3. B 必刷知识** ⊙两角差的余弦公式、二倍角的余弦公式

【解析】由题知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6} -$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} = \sin \alpha,$$

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2}$, 即 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

所以 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

4. D 必刷知识 ⊙两角差的正弦公式、同角三角函数的基本关系、二倍角公式

【解析】由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 得 $-\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} - \alpha < \frac{\pi}{3}$, 令 $t = \frac{\pi}{3} - \alpha$, 则 $t \in$

关键点

$$\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right),$$

即 $\sin t = \frac{1}{5}$, 于是 $\cos t = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\sin 2t = 2\sin t \cos t = \frac{4\sqrt{6}}{25}$, $\cos 2t =$

$$1 - 2\sin^2 t = \frac{23}{25},$$

所以 $\sin 2\alpha = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2t\right) = \sin \frac{2\pi}{3} \cos 2t - \cos \frac{2\pi}{3} \sin 2t =$

$$\frac{23\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{50}. \text{ 故选 D.}$$

5. D 必刷知识 ⊙诱导公式、辅助角公式、二倍角的余弦公式

【解析】因为 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha +$

$$\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) -$$

$$\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ 所以 } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}, \text{ 所以}$$

$$\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{9}, \text{ 所以 } \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{9}. \text{ 故选 D.}$$

6. A 必刷考点 ⊙两角和与差的余弦公式、二倍角的余弦公式

【解析】因为 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$

$$\frac{1}{6}, \text{ 所以 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\beta =$$

$$-\frac{1}{2} \cos[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] - \frac{1}{2} \cos[(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] =$$

$$-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \text{ (提示: 若能记住和差化积的结论可以}$$



直接使用,具体公式见本节“要点集结”),

所以 $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = -\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = -\frac{5}{36}$. 故选 A.

7. B 必刷知识 ② 两角和的正切公式

【解析】由 $2\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$ 得 $\alpha + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{3}$ (提示:观察题干中角的关系,为后续解题作铺垫), 所以 $\tan\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\beta}{2}} =$

$$\sqrt{3}, \text{ 又 } \tan \alpha \tan \frac{\beta}{2} = 2 - \sqrt{3}, \text{ 则 } \tan \alpha + \tan \frac{\beta}{2} =$$

$$\sqrt{3} \left(1 - \tan \alpha \tan \frac{\beta}{2}\right) = 3 - \sqrt{3} \text{ (提示:两角和的正切公式的逆$$

用), 解得 $\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}, \tan \frac{\beta}{2} = 1$ 或 $\tan \alpha = 1, \tan \frac{\beta}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

因为 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{4}, \tan \frac{\beta}{2} \neq 1$, 故 $\tan \frac{\beta}{2} = 2 - \sqrt{3}$,

易错点

$$\text{则 } \tan \beta = \frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 因为 } \beta \text{ 为锐角, 所以}$$

$\beta = \frac{\pi}{6}$. 此时 $\tan \alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{4}$, 符合题意. 故选 B.

8. B 必刷题型 ② 给值求值

【解析】 $\because 2 \tan \alpha = \tan(\alpha + \beta), \therefore \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ (提示:切化

弦), $\therefore 2 \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin(\alpha + \beta),$

$$\therefore \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin(\alpha + \beta),$$

$$\therefore \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos(\alpha + \beta),$$

关键点

$$\therefore \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin \beta.$$

$$\because \sin \beta = \frac{1}{4}, \therefore \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha = \frac{1}{2}, \therefore \sin(2\alpha + \beta) = \sin[(\alpha + \beta) + \alpha] =$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \text{ 故选 B.}$$

9. BCD 必刷考点 ② 和差角公式、二倍角公式

【解析】依题意, $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$

$$\text{由 } \tan \alpha + \tan \beta = 1, \text{ 得 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1,$$

$$\text{即 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{4}{5}, \text{ 又 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5},$$

所以 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}$ (提示:两角和的余弦公式),

$$\text{则 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1, \tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} =$$



$\frac{1}{4}$, 故 B, C 正确.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{4}{3}, \text{ 从而 } \tan[2(\alpha + \beta)] = \frac{8}{1 - \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{8}{1 - \frac{16}{9}} = -\frac{24}{7}, \text{ 故 D 正确.}$$

由 B 选项知 $\cos(\alpha - \beta) = 1$, 又 α, β 为锐角, 则 $\alpha - \beta = 0, \alpha = \beta$,
 $\sin \alpha \cos \beta = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, 又 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$,
 所以 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{2}{5}$, 故 A 错误. 故选 BCD.

真题风向练

10. C 命题点 ①二倍角公式、同角三角函数的基本关系

【解析】由题可得, $3\sin 2\alpha \cos \alpha = 8\sin \alpha \cos 2\alpha$, 且 α 为第二象限角, 则 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \cos 2\alpha \neq 0$. 等式两边同

时除以 $3\cos 2\alpha \cos \alpha$, 则 $\tan 2\alpha = \frac{8}{3} \tan \alpha$, 根据二倍角的正切

公式可知, $\frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{8}{3} \tan \alpha$, 即 $\tan^2 \alpha = \frac{1}{4}$, 又 $\tan \alpha < 0$,

$\therefore \tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 结合 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 解得 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha =$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}$ (另解: 由 $3\sin 2\alpha \cos \alpha = 8\sin \alpha \cos 2\alpha$, 得 $6\sin \alpha \cos^2 \alpha =$

$8\sin \alpha (2\cos^2 \alpha - 1)$, $\therefore \alpha$ 为第二象限角, $\therefore \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$,

故 $3\cos^2 \alpha = 4(2\cos^2 \alpha - 1)$, 即 $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\therefore \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\therefore \frac{1 + \sin \alpha}{2 - \cos \alpha} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$. 故选

C.

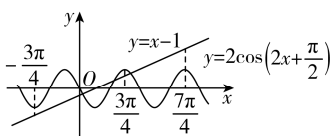
第3节 三角函数的图象和性质



题型上分练

1. A 【解析】 $2\cos\left[2 \times \left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -2 > -\frac{3\pi}{4} - 1$, $2\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 > \frac{3\pi}{4} - 1$, $2\cos\left(2 \times \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 < \frac{7\pi}{4} - 1$,

作出函数 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $y = x - 1$ 的大致图象, 如下图所示, 易知共有 3 个交点. 故选 A.





2. C 【解析】令 $f(x) = 0$, 即 $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x = 0$, 移项可得

$$2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin x.$$

对于函数 $y = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, 其最小正周期 $T_1 = \frac{2\pi}{3}$; 对于函数

$y = -\sin x$, 其最小正周期 $T_2 = 2\pi$. 当 $x \in [0, 2\pi)$ 时, 在同一平面

直角坐标系下画出两个函数的大致图象如图所示(提示:

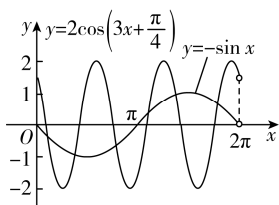
将函数零点个数转化为两个函数图象的交点个数), 由图象

可以看出, 两函数图象在区间 $[0, 2\pi)$ 内的交点个数为 6, 即方程

$2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x = 0$ 在给定区间 $[0, 2\pi)$ 内的解的个数为

6, 所以函数 $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x$ 在 $[0, 2\pi)$ 内的零点

个数为 6. 故选 C.



3. D 【解析】易知 $f(x) = 2\sin[\pi(x+2026)] = 2\sin \pi x$ 的图象

关键点

与函数 $g(x) = \frac{1}{1-x}$ 的图象都关于点 $(1, 0)$ 对称, 因为 $f\left(\frac{1}{3}\right) =$

$$2\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sin \frac{\pi}{2} = 2,$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, f(0) = 2\sin 0 = 0, g(0) = \frac{1}{1-0} = 1, \text{ 所以}$$

$f\left(\frac{1}{3}\right) > g\left(\frac{1}{3}\right), g(0) > f(0)$, 且函数 $f(x) = 2\sin \pi x$ 与函数

$g(x) = \frac{1}{1-x}$ 的图象在直线 $x = 1$ 的左、右两侧均连续, 当 $x \in$

$[-2, 4]$ 时, 在同一平面直角坐标系中分别画出它们的大致

图象, 如图所示. 由函数图象可知, 在 $(0, 1)$ 上, 函数 $f(x)$ 与

函数 $g(x)$ 的图象有 2 个交点, 在 $(-2, 0)$ 上, 函数 $f(x)$ 与函数

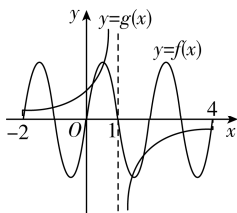
$g(x)$ 的图象有 2 个交点, 所以函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图象

在 $(-2, 1)$ 上有 4 个交点, 结合两函数的图象均关于点 $(1, 0)$

对称, 可得在 $[-2, 4]$ 上两函数的图象共有 8 个交点(提示:

交点成对出现, 且每一对交点横坐标之和均为 2), 则 $\sum_{i=1}^8 x_i =$

8, 故选 D.





4. D 【解析】若把函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 则得到的图象对应的解析式为 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 再把所得图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 则得到的图象对应的解析式为 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$ (提示: 图象的左、右平移是针对 x 而言的), 故所求函数解析式为 $y = \sin x$. 故选 D.

5. A 【解析】将函数 $y = 5\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数 $y = 5\tan\left(x + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = 5\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 再将该函数图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$, 纵坐标不变, 即可得到函数 $f(x) = 5\tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象 (提示: 将已知图象逆向变换即可得到原始图象). 故选 A.

6. D 【解析】函数 $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 所以函数 $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期可得函数 $y = 2\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -2\cos\left[\pi - \left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right] = -2\cos\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right) = -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象. 故选 D.

7. C 【解析】观察题图可得函数 $f(x)$ 的最大值为 3, 最小值为 -3, 因为 $A > 0$, 所以 $A = 3$, 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则 $3 - (-1) = \frac{T}{2}$, 所以 $T = 8$, 故 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$, 则 $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \varphi\right)$. 因为当 $x = \frac{3+(-1)}{2} = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取最大值 3, 所以 $3\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 3$, 即 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 1$, 则 $\frac{\pi}{4} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\varphi \in [0, 2\pi)$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right)$. 故选 C.

8. A 【解析】因为 $f(x)$ 的图象过点 $A(0, 1)$, 所以 $f(0) = 0 - b = 1$, 解得 $b = -1$. $f(x) = a\sin \omega x + \cos \omega x = \sqrt{a^2 + 1} \sin(\omega x + \varphi)$, $\tan \varphi = \frac{1}{a}$, 又因为 $f(x)$ 的图象过点 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, 所以 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{a^2 + 1} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\omega + \varphi\right) = 0$, 则 $-\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ①, 由 $f(x)$ 的图象过点 $A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ 可知 $f(x)$ 的图象



的一条对称轴为直线 $x = \frac{0 + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, 且在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处取得最大

值, 则 $\frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ②, 由 ② - ① 得 $\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3}\omega = \frac{\pi}{2}$,

解得 $\omega = 1$, 所以 $f(x) = a\sin x + \cos x$, 将 $B\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ 代入得

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = 1, \text{解得 } a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{所以 } \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

9. C 【解析】由题中函数图象可知 $A = 1$, 函数图象过 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$,

$\left(\frac{7\pi}{12}, -1\right)$ 两点.

设 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 T , 因为 $\omega > 0$, 所以有

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{而 } \frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \pi, \text{因此 } \omega = 2,$$

即 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0$, 即 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = 2k\pi +$

$\frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k =$

0 , 即 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 因此 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right]$.

而 $g(x) = A\cos \omega x = \cos 2x$, 所以将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个

单位长度即可得到 $g(x) = \cos 2x$ 的图象. 故选 C.

10. B 【解析】根据 $f(0) = 2$ 可得 $\sin \varphi = 1$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in$

$\mathbf{Z}$, 故 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 2\cos \omega x$.

令 $f(x) = 2\cos \omega x = \sqrt{2}$, 得 $\omega x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 或 $\omega x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$,

$k \in \mathbf{Z}$, 结合图象可知 $\omega x_A = -\frac{\pi}{4} + 2\pi, \omega x_B = \frac{\pi}{4} + 2\pi$, 因此

$|AB| = x_B - x_A = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{4}$, 故 $\omega = 2$, 因此 $f(x) = 2\cos 2x$, 故

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos \pi = -2$. 故选 B.

11. B 【解析】 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x + 1 = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot$

$\cos 2x + 1 = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $-\frac{5\pi}{6} \leq$

$2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$ (提示: 将 $2x - \frac{\pi}{3}$ 视为整体), 结合正弦函数图

象可知, $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$, 因此 $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$, 所



以 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$. 故选 B.

12. D 【解析】 $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$,

故单调递增区间满足 $2k\pi - \pi \leq 3x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$.

令 $k=0$, 则 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{12}$; 令 $k=1$, 则 $\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$,

又 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间是

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right], \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$. 故选 D.

13. B 【解析】 $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 因为 $-a \leq$

$x \leq a$, 所以 $-a + \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq a + \frac{\pi}{3}$.

又 $0 \in [-a, a]$, 所以 $\frac{\pi}{3} \in \left[-a + \frac{\pi}{3}, a + \frac{\pi}{3}\right]$, 因为余弦函数

在 $[0, \pi]$ 上单调递减, 所以 $\begin{cases} 0 \leq -a + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}, \\ a + \frac{\pi}{3} \leq \pi, \\ a \neq 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq$

$\frac{\pi}{3}$. 所以 a 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

14. B 【解析】函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 的图象向左平移 φ 个单位长度后得到 $f(x + \varphi) = \sin(2x + 3\varphi)$ 的图象.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + 3\varphi \in [3\varphi, \pi + 3\varphi]$,

因为 $f(x + \varphi) = \sin(2x + 3\varphi)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 所以

$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3\varphi, \\ \pi + 3\varphi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} k \in \mathbf{Z}$, 即 $\begin{cases} -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leq \varphi, \\ \varphi \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \end{cases} k \in \mathbf{Z}$, 可得 $\varphi =$

$-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$, 又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 故选 B.

15. AC 【解析】当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{6}\right]$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 3 个零点, $\therefore f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有 2 个极大值点, 故 A 正确.

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 3 个零点, $\therefore 3\pi \leq 2\pi\omega + \frac{\pi}{6} <$

4π , $\therefore \frac{17}{12} \leq \omega < \frac{23}{12}$, 当 $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ 或 $\frac{7\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极



小值,故 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有 2 个或 1 个极小值点,故 **B** 错误.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}(\omega+1)\right)$, $\because \frac{17}{12} \leq \omega < \frac{23}{12}$, $\therefore \frac{\pi}{6}(\omega+1) < \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{23}{12}+1\right) = \frac{35\pi}{72} < \frac{\pi}{2}$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增,故 **C** 正确.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 则 $\frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$, $\therefore T \geq \frac{3\pi}{5}$, $\therefore \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{3\pi}{5}$, $\therefore \omega \leq \frac{10}{3}$, $\therefore \frac{17}{12} \leq \omega < \frac{23}{12}$, $\therefore \omega$ 的最小值为 $\frac{17}{12}$, 故 **D** 错误. 故选 AC.

16. $\left[\frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$ 【解析】如图所示, 由对称性可得 **突破点**

题中阴影部分的面积等于矩形 C_1CDD_1 的面积,

所以 $CD \cdot CC_1 = CD = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3}$,

解得 $\omega = 3$, 所以 $f(x) = \tan(3x + \varphi)$.

将点 $A\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ 代入 $f(x)$, 得 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 1$,

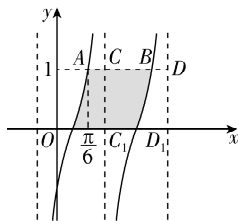
所以 $\frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $-\pi < \varphi < 0$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x) = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

又 $f(x) \geq \sqrt{3}$, 所以 $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \sqrt{3}$, 所以 $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq 3x -$

$\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

即不等式 $f(x) \geq \sqrt{3}$ 的解集为 $\left[\frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$.



17. 【解】(1) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi + a \sin \frac{\pi}{2} = -1 + a = -2$, 解得 $a = -1$,

所以 $f(x) = \cos 2x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x$.

令 $\sin x = t$, 则 $t \in [-1, 1]$, $y = -2t^2 - t + 1 = -2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$,

则函数 $y = -2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$ 在 $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ 上单调递减,



所以当 $t=1$, 即 $\sin x=1$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 -2 .

$$\begin{aligned}(2) g(x) &= \sqrt{2} \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin x \\ &= \sqrt{2} \sin 2x - \sin x + \cos x + 2 \sin x \\ &= 2\sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x.\end{aligned}$$

令 $\sin x + \cos x = m$, 则 $m = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

$$\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2} = \frac{m^2 - 1}{2},$$

$$\text{则 } g(x) \text{ 可化为 } y = \sqrt{2} m^2 - \sqrt{2} + m = \sqrt{2} \left(m + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 - \frac{9\sqrt{2}}{8},$$

所以当 $m = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, y 取得最小值 $-\frac{9\sqrt{2}}{8}$;

当 $m = \sqrt{2}$ 时, y 取得最大值 $2\sqrt{2}$,

所以 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{9\sqrt{2}}{8}, 2\sqrt{2} \right]$.

18. 【解】 (1) $f(x) = \sqrt{2} (\sin^2 x - \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) - m = \sqrt{2} (\sin 2x - \cos 2x) - m = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - m$,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $-2 - m = -3$, 解得 $m = 1$.

$$\text{即 } f(x) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - 1,$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } -\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi \right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 由已知可得 $g(x) = 2 \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{8} \right) - \frac{\pi}{4} \right] - 1 + 1 = 2 \sin 2x$, 所以不等式 $g(x) \geq f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ 即为 $\sin 2x \geq \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

$$\text{令 } t = x - \frac{\pi}{4}, \text{ 则由 } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right], \text{ 得 } t \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right],$$

$$\text{则原不等式化为 } \sin \left[2 \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right] \geq \sin t,$$

$$\text{所以 } \cos 2t \geq \sin t, \text{ 所以 } 2 \sin^2 t + \sin t - 1 \leq 0,$$

$$\text{所以 } -1 \leq \sin t \leq \frac{1}{2}.$$

结合函数 $y = \sin t$ 在 $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right]$ 上的图象, 可得 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ 或

$$\frac{5\pi}{6} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ 即 } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} \text{ 或 } \frac{13\pi}{12} \leq x \leq \frac{7\pi}{4},$$

所以原不等式在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$ 上的解集为 $\left\{ x \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \right.$

$$\left. \frac{5\pi}{12} \text{ 或 } \frac{13\pi}{12} \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \right\}.$$



19. A 【解析】对于 A, $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x$, 周期为 π , 是

奇函数, 并且在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 故 A 符合题意.

对于 B, $y = \sin 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 故 B 不符合题意.

对于 C, $y = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 没有定义, 故 C 不符合题意.

对于 D, $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$ 为偶函数, 故 D 不符合题意. 故选 A.

20. D 【解析】依题意, $g(x) = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$ 为偶函数, 则 $\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = 6k + 1, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 2$ 时, $\omega = 13$, D 正确, 其他选项均不正确. 故选 D.

21. D 【解析】因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x) = \cos(-2x) - \sin(-x + \varphi) = f(x) = \cos 2x - \sin(x + \varphi)$, 即 $\sin(x + \varphi) = \sin(-x + \varphi)$, 即函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 是偶函数, 则 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,
关键点

又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x) = \cos 2x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x - \cos x$, 则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$.

22. B 【解析】由题图可知, 函数 $f(x)$ 为偶函数, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 且函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义.

对于 A, 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2} = -\frac{\sin x}{x^2} = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数, 故 A 不符合题意.

对于 B, 函数 $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{\cos x}{x^2} = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 故 B 符合题意.

对于 C, 函数 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = -\frac{\cos x}{x} = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数, 故 C 不符合题意.

对于 D, 函数 $f(x) = x^2 \cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 故 D 不符合题意. 故选 B.



23. C 【解析】由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, 得 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \varphi\right)$, 展开得 $\sin \frac{2\pi}{3} \cos \varphi + \cos \frac{2\pi}{3} \sin \varphi = -\sin \frac{2\pi}{3} \cos \varphi + \cos \frac{2\pi}{3} \sin \varphi$, 整理得 $\sqrt{3} \cos \varphi = 0$, 即 $\cos \varphi = 0$, 解得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 则 $f(x) = \sin\left(2x + k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $f(x) = \cos 2x$ 或 $f(x) = -\cos 2x$, 故 $f(x)$ 是偶函数, 充分性成立.

因为 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以 $f(-x) = f(x)$ 对任意 x 恒成立, 则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, 必要性成立.

因此甲是乙的充要条件.

24. D 【解析】因为 $f(x) = (x-1)^3 \sin \omega x (\omega > 0)$,

所以 $f(x+a) = (x+a-1)^3 \sin[\omega(x+a)] (\omega > 0)$.

因为存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 使 $f(x+a)$ 为奇函数, 则 $a = 1$ (提示: 根据三次函数得到), 所以 $f(x+1) = x^3 \sin[\omega(x+1)] (\omega > 0)$, 此时 $y = \sin[\omega(x+1)] = \sin(\omega x + \omega)$ 为偶函数 (提示: 奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数), 所以 $\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $\omega > 0$, 所以 ω 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$. 故选 D.

25. C 【解析】由题意可得 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 4\pi$, 定义域为 $\mathbf{R}$. 因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,

而 $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) < \frac{T}{2}$, 所以 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称,

关键点

所以 $f(0) = \cos \varphi = 0$, 所以 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ (提示: 0 是

$f(x)$ 在单调递减区间内的零点). 故选 C.

26. ABD 【解析】(定义法) 对于 A, $f(x+\pi) = |\tan(x+\pi)| =$

$|\tan x| = |\tan x| = f(x)$, 故 A 符合题意.

对于 B, $f(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$, 故 B 符合题意.

对于 C, 因为 $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1, f\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$,

$f\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\right) \neq f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, 所以 $f(x) = \sin|2x|$ 不是以 π 为周期

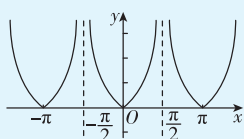
的函数, 故 C 不符合题意.

对于 D, 函数 $y = |\sin 2x|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 π 也是它

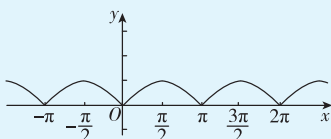
的一个周期, 故 D 符合题意. 故选 ABD.



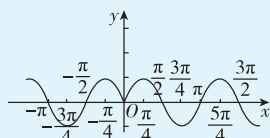
关键点拨 在研究含绝对值函数的周期问题时,除了定义法外,也可利用数形结合的方法研究绝对值函数的图象,进而判断周期. 本题四个选项的函数图象如图所示.



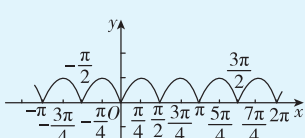
$$f(x) = |\tan x|$$



$$f(x) = |\sin x|$$



$$f(x) = \sin |2x|$$



$$f(x) = |\sin 2x|$$

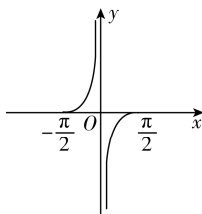
27. A 【解析】当 $m=4n, n \in \mathbf{Z}$ 时,

函数 $f(x) = \tan x \left(x \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z} \right)$, 其在 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$ 上单调递增, 不符合题意;

当 $m=4n+1, n \in \mathbf{Z}$ 时, 函数 $f(x) = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ $\left(x \neq k_2\pi + \frac{\pi}{4}, k_2 \in \mathbf{Z} \right)$, 易知 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$ 上单调递增, 不符合题意;

当 $m=4n+3, n \in \mathbf{Z}$ 时, 函数 $f(x) = \tan \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$ $\left(x \neq k_3\pi - \frac{\pi}{4}, k_3 \in \mathbf{Z} \right)$, 易知 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$ 上单调递增, 不符合题意;

当 $m=4n+2, n \in \mathbf{Z}$ 时, 函数 $f(x) = \tan \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ $(x \neq k_4\pi, k_4 \in \mathbf{Z})$, 其部分图象如图所示, 满足题意, 它的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right), k \in \mathbf{Z}$. 故选 A.



28. C 【解析】对于 A, 因为函数 $f(x) = 2\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $f \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = f(x)$, 故 A 正确.

对于 B, 因为 $f \left(\frac{2\pi}{9} \right) = 2\sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = 2\sin \frac{\pi}{2} = 2$, 所以直线 $x = \frac{2\pi}{9}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 $f \left(x + \frac{2\pi}{9} \right) = f \left(\frac{2\pi}{9} - x \right)$, 故 B 正确.



对于 C, 由 B 选项分析可知 $f\left(x + \frac{2\pi}{9}\right) = f\left(\frac{2\pi}{9} - x\right)$, 令 $x = \frac{\pi}{18}$, 可得 $f\left(\frac{5\pi}{18}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上不单调, 故 C 错误.

对于 D, 因为 $f\left(\frac{7\pi}{18}\right) = 2\sin\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin \pi = 0$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{18}, 0\right)$ 中心对称, 故 D 正确.

故选 C.

29. D 【解析】 $f(x) = 2\sin 2x$, $g(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. 对于 A, 当

$f(x)$ 取得最大值时, $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $g(x) = 1$, A 错误.

对于 B, 当 $g(x)$ 取得最大值时, $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $f(x) = 1$, B 错误.

对于 C, D, 因为 $f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 2\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) = 2\sin\left[\pi - \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = g(x)$, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图

象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, C 错误, D 正确. 故选 D.

30. D 【解析】由函数 $f(x) = 4\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 π

个单位长度后, 所得图象与原来的图象重合, 知 π 是函数 $f(x)$ 的一个周期 (易错: 此时 π 不一定是最小正周期, 而是

最小正周期的正整数倍), 所以 $k \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \pi, k \in \mathbf{Z}^+$, 即 $\omega = 2k$,

$k \in \mathbf{Z}^+$, 由 $0 < \omega < 4$, 得 $\omega = 2$, 故 $f(x) = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 令 $2x +$

$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k_1\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z}$, 所以函数

$f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k_1\pi}{2}, 0\right), k_1 \in \mathbf{Z}$, 令 $-\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{12} +$

$\frac{k_1\pi}{2} < \frac{\pi}{3}$, 得 $-\frac{1}{2} < k_1 < \frac{1}{2}$, 则 $k_1 = 0$, 故函数 $f(x)$ 的图象在

$\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$. 由 $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$, 得 $0 <$

$2x + \frac{\pi}{3} < \pi$, 则函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减. 由 $x_1,$

$x_2 \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 得 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{12}$, 即 $x_1 +$

$x_2 = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -2$. 故

选 D.

31. AC 【解析】 $f(x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$$\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}{2} + \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x + 1 =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1.$$

$f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 正确.

$f(x)$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$, 故 **B** 错误.

当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$, $y = \sin z$ 在 $z \in$

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递减, 即 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减, 故 C 正确.

令 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 故 $f(x)$ 的图象

的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, 1\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. 令 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, 得 $k =$

$\frac{1}{6} \notin \mathbf{Z}$, 所以 $f(x)$ 的图象不关于点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$ 中心对称, 故 **D**

错误, 故选 AC.

32. ABD 【解析】因为 $f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$, $g(-x) = \sin^2 x \cos^2 x = g(x)$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域均为 $\mathbf{R}$, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数, 故 **A** 正确.

因为 $f(2\pi-x) = \sin(\cos(2\pi-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$,

所以曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\pi$ 对称, 故 **B** 正确.

因为 $g(x) = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$, 所以 $g(x)$ 的最小正周期为

$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 又 $f(x + \pi) = \sin(\cos(x + \pi)) = \sin(-\cos x) = -\sin(\cos x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期不是 π , 故 C 错误.

由 $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{2}+k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$, 得 $4x \in [-3\pi+4k\pi, -2\pi+4k\pi] (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $y = \cos 4x$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{2}+k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增, 则 $g(x) = \frac{1-\cos 4x}{8}$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{2}+k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递减, 故 **D 正确**. 故选 ABD.

33. D 【解析】 $f(x) = 8\cos\left(x - \theta + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \theta - \frac{\pi}{3}\right) + 2 =$

$$8 \left[\frac{1}{2} \cos(x-\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x-\theta) \right] \left[\frac{1}{2} \cos(x-\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x-\theta) \right] + 2 = 8 \left[\frac{1}{4} \cos^2(x-\theta) - \frac{3}{4} \sin^2(x-\theta) \right] + 2 = \cos[2(x-\theta)]$$



$\theta) + 1 - 3 + 3\cos[2(x-\theta)] + 2 = 4\cos(2x-2\theta)$ (提示:也可用积化和差公式化简).

因为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{6}$,

所以 $2 \times \frac{\pi}{6} - 2\theta = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

又因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x \in [0, t]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, 2t - \frac{\pi}{3}\right]$, 因为函数 $f(x)$

在区间 $[0, t]$ 上的值域为 $[2, 4]$, 所以 $0 \leq 2t - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$, 解得

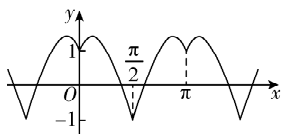
$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$, 所以实数 t 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 D.

34. D 【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = |\sin \omega x| + \cos \omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π , $\therefore \omega = 2$, 从而 $f(x) = |\sin 2x| + \cos 2x =$

$$\begin{cases} \sin 2x + \cos 2x, x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \\ -\sin 2x + \cos 2x, x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right), \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \\ -\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right), \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

其图象如图所示.



由图象知 $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 时, $f(x)$ 先减后增, 故 **A** 错误.

$\because f(x) + f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = |\sin 2x| + \cos 2x + \left| \sin \left[2\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\right] \right| + \cos \left[2\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\right] = |\sin 2x| + \cos 2x + |\cos 2x| - \sin 2x$, 不一定为 0,

$\therefore \left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 不是 $f(x)$ 图象的对称中心, 故 **B** 错误.

$\because f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \left| \sin \left[2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] \right| + \cos \left[2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = |\cos 2x| + \sin 2x$, 不恒等于 $f(x)$, $\therefore$ 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 不是 $f(x)$ 图象的对称轴, 故 **C** 错误.

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 此时 $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, 所以 $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1, \sqrt{2}]$, $\because f(x)$ 是偶函

数, $\therefore x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) \in [-1, \sqrt{2}]$, 又 $\because$ 函数 $f(x)$ 的



最小正周期为 π , $\therefore f(x)$ 的值域为 $[-1, \sqrt{2}]$, 故 **D** 正确. 故选 **D**.

35. 【解】(1) $\because$ 两个相邻零点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

故最小正周期 $T = \pi$, 故 $\omega = 2$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$.

选①, $\because$ 函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴为直线 $x = -\frac{\pi}{3}$,

$$\therefore 2 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } \varphi = \frac{7\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

选②, $\because$ 函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$,

$$\therefore 2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } \varphi = k\pi - \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

选③, $\because$ 函数 $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数, $\therefore f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) =$

$$2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right) \text{ 为偶函数,}$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$(2) h(x) = \frac{1}{2}f(x) - \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 2x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{当 } x \in [0, m] \text{ 时, } -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2m - \frac{\pi}{6},$$

$$\because \text{函数 } h(x) \text{ 在 } [0, m] \text{ 上不单调, } \therefore 2m - \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } m > \frac{\pi}{3}.$$

$$\because m \in \mathbf{Z}, \therefore \text{整数 } m \text{ 的最小值为 } 2.$$



综合提分练

1. **D** 必刷考点 ① 三角函数的图象变换

$$\text{【解析】} y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$\sin\left[2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)\right] \text{ (提示: 化为同名函数), 所以将函数 } y =$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的图象向右平移 } \frac{5\pi}{12} \text{ 个单位长度即可得函数 } y =$$

$$\sin 2x \text{ 的图象. 故选 D.}$$



一题多解

(逆向思维) 函数 $y = \sin 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的图

象平移 $|\varphi|$ 个单位长度 ($\varphi > 0$ 则左移, $\varphi < 0$ 则右移), 得 $y =$

$\cos\left[2(x+\varphi) - \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(2x+2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象, 则 $2\varphi - \frac{\pi}{2} =$

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\varphi = \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以当 k 取

0 时, $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y =$

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 反过来则 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向

右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y = \sin 2x$ 的图象.

2. C 必刷题型 ① 余弦型函数的实际应用

【解析】由题知 $f(k) = 2\,000\cos\left(\frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\,500 (k \in \mathbf{N}^*, 1 \leq k \leq 12)$,

令 $2\,000\cos\left(\frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\,500 \geq 3\,500$,

得 $\cos\left(\frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$, 则 $2n\pi - \frac{\pi}{3} \leq \frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \leq 2n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in$

$\mathbf{Z}$, 解得 $12n-6 \leq k \leq 12n-2, n \in \mathbf{Z}$, 结合 $1 \leq k \leq 12, k \in \mathbf{N}^*$, 可知当 $n=1$ 时, $6 \leq k \leq 10$, 即该地湖泊一年中是鸟类繁育“旺季”的月份有 5 个. 故选 C.

3. B 必刷题型 ① 根据函数部分图象确定相关参数的值

【解析】由题图可知 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 2\left(\frac{11\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}\right) =$

$\frac{2\pi}{3}$, 又 $\omega > 0, T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\omega = 3$. 因为 $\frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}}{2} = \frac{3\pi}{4}$, 所以

关键点

结合题意可知 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{9\pi}{4} + \varphi\right) = \sqrt{2}$, 即 $\sin\left(\frac{9\pi}{4} + \varphi\right) =$

1, 所以 $\frac{9\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = -\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

又因为 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 故 $\omega\varphi = \frac{3\pi}{4}$. 故选 B.

4. A 必刷题型 ① 三角函数的性质的综合应用

【解析】因为函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 处取得最小

值, 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得最大值, 所以 $\begin{cases} -\frac{\pi\omega}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \\ \frac{\pi\omega}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, \end{cases}$

$k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ (提示: 两个最值之间的水平距离 = 半个最小正周期

的正整数倍), 将上述两个等式作差得 $\frac{\pi\omega}{2} = \pi + 2(k_2 - k_1)\pi$

$(k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$, 所以 $\omega = 4(k_2 - k_1) + 2 (k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$, 将 $\omega = 4(k_2 -$



$k_1) + 2(k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$ 代入 $\frac{\pi\omega}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$, 可得 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2(k_2 + 2k_1)\pi}{3} (k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$, 令 $k = k_2 + 2k_1, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$, 综合选项可知, φ 的可能取值为 $-\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

5. B 必刷考点 ⊙ 三角函数的单调性、周期性

【解析】对于 A, $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, f\left(\frac{1}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{5}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 所以函数 $f(x) = \sin \pi x$ 在 $(0, 1)$ 上不单调递增, 故 A 不符合题意.

对于 B, $f(x+2) = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right) \right| = \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right| = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的周期为 2, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right| = \sin \frac{\pi}{2}x$,

因为 $0 < \frac{\pi}{2}x < \frac{\pi}{2}$, 函数 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以函数 $f(x) = \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right|$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 同理可得函数

$f(x) = \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right|$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 所以函数 $f(x) = \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right|$ 的最小正周期为 2, 故 B 符合题意.

对于 C, 因为 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \pi = -1$, 所以函数 $f(x) = \cos 2\pi x$ 在 $(0, 1)$ 上不单调递增, 故 C 不符合题意.

对于 D, 函数 $f(x) = \tan \pi x$ 的定义域为 $\left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$, 所以函数 $f(x) = \tan \pi x$ 在 $(0, 1)$ 上不单调递增, 故 D 不符合题意. 故选 B.

6. C 必刷考点 ⊙ 三角函数的周期性及值域

【解析】因为 $f(x+\pi) = \cos(x+\pi) [\sin(x+\pi) - |\sin(x+\pi)|] = -\cos x (-\sin x - |\sin x|) \neq f(x)$, 所以 π 不是函数 $f(x)$ 的周期, A, B 错误.

$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) [\sin(x+2\pi) - |\sin(x+2\pi)|] = \cos x \cdot (\sin x - |\sin x|) = f(x)$, 所以 2π 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

$$f(x) = \cos x (\sin x - |\sin x|) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi], \\ \sin 2x, & x \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

又 $x \in (\pi, 2\pi] \Rightarrow 2x \in (2\pi, 4\pi] \Rightarrow -1 \leq \sin 2x \leq 1$,

所以 $f(x)$ 的值域 $I = [-1, 1]$ (提示: 只需确定函数 $f(x)$ 在一个周期内的值域), C 正确, D 错误.

7. C 必刷考点 ⊙ 三角函数的周期性、对称性, 含绝对值的三角函数

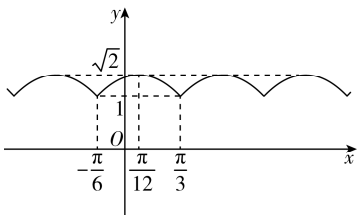
【解析】因为 $f(x) = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right| + \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right| + \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right|$,



$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \right| + \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \right| = \\ \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right| + \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right| = f(x),$$

所以 $\frac{\pi}{2}$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $x + \frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 此时 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$, 作出函数的大致图象,



由图象可得函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$. 故选 C.

8. ABD 必刷考点 ⊙ 辅助角公式、三角函数图象和性质的综合应用

【解析】 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = 2\sin\left[\omega\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(\omega x + \frac{5\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{6}\right)$,

由 $f\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$ 的图象关于原点对称, 得 $\frac{5\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{6} = \pi + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

$$\omega = 2 + \frac{12}{5}k (k \in \mathbf{Z}),$$

而 $0 < \omega < 3$, 则 $\omega = 2$, $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

$f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 正确.

由 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 故 B 正确, C 错误.

由 $-\frac{\pi}{12} \leq x < a$, 得 $0 \leq 2x + \frac{\pi}{6} < 2a + \frac{\pi}{6}$, 而 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12}, a\right)$ 上

既有极大值点又有极小值点, 则 $2a + \frac{\pi}{6} > \frac{3\pi}{2}$, 解得 $a > \frac{2\pi}{3}$, 故

D 正确. 故选 ABD.

9. D 必刷知识 ⊙ 正切型三角函数的值域及最值

【解析】正切函数 $y = \tan x$ 的最小正周期为 π , 当 $x \in$

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ 时, } \omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3}\right).$$

分析: 题干说“函数 $f(x) = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上

有定义”, 则 $\left[\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内, 根据正切函



数的图象可知,一个周期内的图象一半在 x 轴上方,一半在 x 轴下方,基于此分类讨论.

当 $\tan\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ 时,不妨令 $\frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < \omega \leq \frac{1}{2}$, 则

$\frac{\pi}{3} < \frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{12}$, $\tan \frac{\pi}{3} < \tan\left(\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq \tan \frac{5\pi}{12}$, 而 $\tan \frac{5\pi}{12} =$

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$, 因此 $\sqrt{3} < f\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq 2 + \sqrt{3} < 4$, 故

2 有可能;

当 $\tan\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) < 0$ 时,不妨令 $\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$ 且 $\frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} \leq \pi$, 则

$1 < \omega \leq 2$, $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$, $\tan\left(\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, 故

$-4, -2$ 都有可能.

因此 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值不可能是 4. 故选 D.

10. D 必刷题型 ⊙ 正弦型三角函数图象与性质的综合应用

【解析】设 $g(x)$ 的最小正周期为 T , 由题意可知 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$,

即 $T = \pi$, 且 $\omega > 0$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 可得 $\omega = 2$, $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f(x) = g\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

对于 A, $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \sin 2x$, 为奇函数, 故 A 正确.

对于 B, 因为 $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$, 为最小值, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{11\pi}{12}$ 对称, 故 B 正确.

对于 C, 因为 $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$, 则 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递增, 故 C 正确.

对于 D, 因为 $y = f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\sin\left[\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)$, 由 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$, 得 $2x - \frac{\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 可得 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 所以 $y = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) \in [-1, \sqrt{2}]$, 故 D 错误. 故选 D.



11. D 必刷题型 ①物理学科背景下的三角函数图象与性质的综合应用

【解析】由函数 $y = K\cos(\omega t + \varphi)$ 的图象, 可得 $K = 2$,

最小正周期 $T = 4$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \varphi\right)$.

因为 $A(0, 1)$ 在函数图象上, 所以 $2\cos \varphi = 1$, 即 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$,

又因为 $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$.

当 $t = -1$ 时, $y < 0$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以 $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$.

令 $\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $t = 2k + \frac{2}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

故函数图象在 y 轴右侧的第一条对称轴和第二条对称轴分别为直线 $t = \frac{2}{3}$ 和 $t = \frac{8}{3}$.

令 $t = \frac{2}{3}$, 则 $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2$;

令 $t = \frac{8}{3}$, 则 $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{8}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -2$;

令 $t = 3$, 则 $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} \times 3 - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

所以质点在 $\left[0, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right), \left[\frac{8}{3}, 3\right]$ 的路程分别为 $2 - 1 = 1$ cm, $2 - (-2) = 4$ cm, $-\sqrt{3} - (-2) = 2 - \sqrt{3}$ (cm),

所以前 3 秒该质点走过的路程为 $(7 - \sqrt{3})$ cm. 故选 D.

12. ACD 必刷题型 ②三角函数性质的综合应用、三角恒等变换

【解析】对于 A, 因为函数 $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = \sin(-x) \cdot \sin(-3x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 即 $f(x)$ 的图象是轴对称图形, A 正确.

对于 B, $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x = -\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) = -\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$, 令 $t = \cos 2x, t \in [-1, 1]$, 则 $y = -t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = -\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}$, 当 $t = \frac{1}{4}$ 时, $y = -t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ 取最大值 $\frac{9}{16}$, 即 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{9}{16}$, B 错误.

对于 C, $f(x + \pi) = \sin(x + \pi) \cdot \sin[3(x + \pi)] = (-\sin x) \cdot (-\sin 3x) = \sin x \cdot \sin 3x = f(x)$, 即 $f(x)$ 是以 π 为一个周期的周期函数, C 正确.

对于 D, 令 $f(x) = 0$, 即 $\sin x \cdot \sin 3x = 0$, 故 $\sin x = 0$ 或 $\sin 3x = 0$, 又 $x \in [0, \pi]$, 所以 $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$, 故 $f(x)$ 在 $[0,$



$\pi]$ 上有4个零点, **D** 正确.

故选 ACD.

13. BCD 必刷题型 ⊙ 正切型函数图象和性质的综合应用

【解析】对于 A, 设该函数的最小正周期为 T , 则有 $T = \frac{\pi}{\omega} =$

$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$, 解得 $\omega = 1$, 即 $f(x) = A \tan(x + \varphi)$. 由函数的图

象可知 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 而 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 即

$f(x) = A \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 又 $f(0) = A \tan \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$, 解得 $A = 2$, 所

以 $\omega \cdot \varphi \cdot A = \frac{2\pi}{3}$, 故 **A** 错误.

对于 B, 由选项 A 可知 $f(x) = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$

$2 \tan\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \tan \frac{13\pi}{6} = 2 \tan \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 **B** 正

确.

对于 C, 因为 $\left|f\left(\frac{5\pi}{3} - x\right)\right| = \left|2 \tan\left(\frac{5\pi}{3} - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| = |2 \tan x|$,

$\left|f\left(\frac{5\pi}{3} + x\right)\right| = \left|2 \tan\left(\frac{5\pi}{3} + x + \frac{\pi}{3}\right)\right| = |2 \tan x|$,

所以 $\left|f\left(\frac{5\pi}{3} - x\right)\right| = \left|f\left(\frac{5\pi}{3} + x\right)\right|$, 所以函数 $y = |f(x)|$ 的图象

关于直线 $x = \frac{5\pi}{3}$ 对称, 故 **C** 正确.

对于 D, $y = |f(x)| + \lambda f(x) = \left|2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2\lambda \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $y = |f(x)| + \lambda f(x) = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) +$

$2\lambda \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = (2 + 2\lambda) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right]$ 时, $y = -2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\lambda \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) =$

$(-2 + 2\lambda) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

当函数 $y = |f(x)| + \lambda f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调时, 则

有 $(2 + 2\lambda)(-2 + 2\lambda) \leq 0$, 解得 $-1 \leq \lambda \leq 1$, 故 **D** 正确.

故选 BCD.

14. C 必刷考点 ⊙ 正弦型函数图象的应用

【解析】 $y = m \sin\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$ ($m \in \mathbf{R}$) 的图象是由 $y = m \sin x$ 的图

象向右平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度得到,

$y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{9}\right)\right]$ 的图象是由 $y = 2 \sin 3x$

的图象向右平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度得到,



又当 $x \in \left[\frac{\pi}{9}, \frac{19\pi}{9}\right]$ 时, $x - \frac{\pi}{9} \in [0, 2\pi]$,

所以 曲线 $y = m\sin\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$ ($m \in \mathbf{R}$) 与 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在

突破点

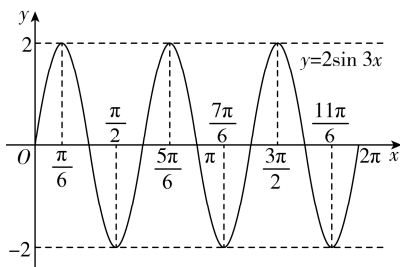
$x \in \left[\frac{\pi}{9}, \frac{19\pi}{9}\right]$ 上的交点个数, 与 $y = m\sin x$ 与 $y = 2\sin 3x$ 在

$x \in [0, 2\pi]$ 上的交点个数一致.

对于 $y = 2\sin 3x$, 令 $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

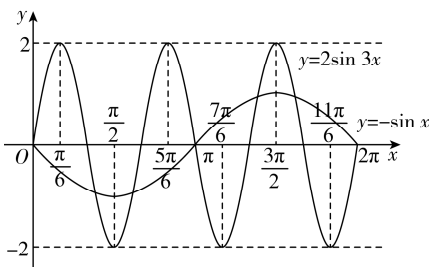
又 $x \in [0, 2\pi]$, 所以 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$,

作出 $y = 2\sin 3x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的大致图象, 如图①.



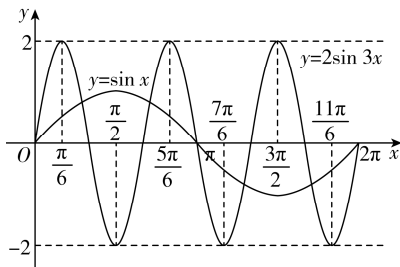
图①

对于 A, 当 $m = -1$ 时, 在 $y = 2\sin 3x$ 的图象中作出 $y = -\sin x$ 的图象, 如图②, 易知此时 $y = m\sin x$ ($m \in \mathbf{R}$) 与 $y = 2\sin 3x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上的交点个数为 7.



图②

对于 B, 当 $m = 1$ 时, 在 $y = 2\sin 3x$ 的图象中作出 $y = \sin x$ 的图象, 如图③, 易知此时 $y = m\sin x$ ($m \in \mathbf{R}$) 与 $y = 2\sin 3x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上的交点个数为 7.



图③

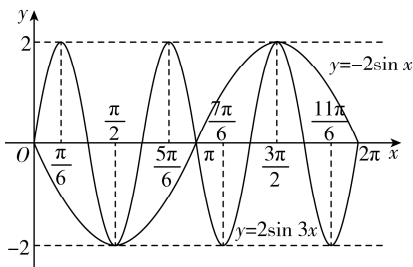
对于 C, 当 $m = -2$ 时, $y = -2\sin x$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $y = -2\sin \frac{\pi}{2} =$

-2 ; 当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = -2\sin \frac{3\pi}{2} = 2$.

在 $y = 2\sin 3x$ 的图象中作出 $y = -2\sin x$ 的图象, 如图④, 易

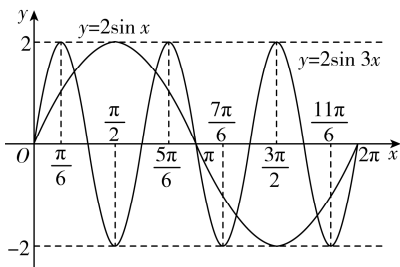


知此时 $y = m \sin x (m \in \mathbf{R})$ 与 $y = 2 \sin 3x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上的交点个数为 5.



图④

对于 D, 当 $m = 2$ 时, 在 $y = 2 \sin 3x$ 的图象中作出 $y = 2 \sin x$ 的图象, 如图⑤, 易知此时 $y = m \sin x (m \in \mathbf{R})$ 与 $y = 2 \sin 3x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上的交点个数为 7.



图⑤

综上, 满足 A, B, D 选项时两曲线交点个数均为 7, 满足 C 选项时两曲线交点个数为 5. 故选 C.

15. 必刷考点 ⊙ 余弦型函数的性质、图象的伸缩变换

【解】(1) 由题意, $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin x + t$

$$= \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{6} -$$

$$\sin x + t$$

$$= \sqrt{3} \cos x - \sin x + t$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) + t$$

$$= 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + t.$$

当 $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 即 $f(x)_{\max} = 2 \times 1 + t = 2 + t = 1$, 解得 $t = -1$.

(2) 由(1)得 $f(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$, 将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 所得图象对应的解析式为

$$g(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1.$$

$$\text{令 } 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

($k \in \mathbf{Z}$), 所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12} \right)$



$\frac{5\pi}{12} \Big] (k \in \mathbf{Z})$. 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right]$, 所以 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 0]$, 所以 $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \in [-3, -1]$, 即 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \right]$ 上的值域为 $[-3, -1]$.

16. 必刷考点 ⊙ 三角函数的奇偶性、周期性、对称性, 三角函数的零点

【解】(1) $\because f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为 $T = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$.

$\because \omega > 0, \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2, \therefore f(x) = \sin(2x + \varphi)$.

又 $\because f(x)$ 的图象过点 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \therefore f(0) = \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

$\therefore$ 函数 $y = f(x+m) = \sin\left(2x+2m+\frac{\pi}{3}\right)$ 是偶函数,

$\therefore 2m + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \therefore m = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$.

$\therefore |m|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$.

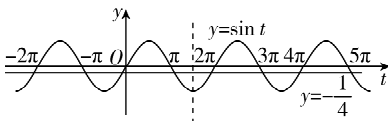
(2) 由 $g(x) = 4f(x) + 1 = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$,

可得 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$.

$\therefore x \in \left[-\frac{17\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}\right], \therefore 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right]$,

设 $2x_i + \frac{\pi}{3} = t_i$, 由如图所示的 $y = \sin t$ 与 $y = -\frac{1}{4}$ 图象,

可知其在 $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right]$ 上共有 8 个交点.



其中 $t_1 + t_8 = t_2 + t_7 = t_3 + t_6 = t_4 + t_5 = 3\pi$,

$\therefore 2x_1 + \frac{\pi}{3} + 2x_8 + \frac{\pi}{3} = 3\pi, \therefore x_1 + x_8 = \frac{7\pi}{6}$,

同理, $2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 7\pi$,

$\therefore x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 = \frac{49\pi}{6}$.

真题风向练

17. $\frac{3\pi}{2}$ 1 **命题点** ⊙ 函数的奇偶性、正弦型函数的单调性

【解析】 由函数 $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ 是偶函数, 得 $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$



$(k \in \mathbf{Z})$. 又因为 $0 \leq \theta < 2\pi$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\theta = \frac{3\pi}{2}$. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = 2\cos ax$, 若 $a = 0$, 则 $f(x) = 2$, 不符合 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增; 若 $a > 0$, 则由 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 得 $0 < ax < \frac{\pi}{2}a$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上不单调递增, 不符合题意; 若 $a < 0$, 则由 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 得 $\frac{\pi}{2}a < ax < 0$, 记 $g(x) = ax$, 易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $y = 2\cos x$ 在 $(\frac{\pi}{2}a, 0)$ 上不单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上不单调递增, 不符合题意, 所以 $\theta = \frac{3\pi}{2}$, 所以 $f(x) = -2\cos ax$. 同上述讨论, 可知 $a \neq 0$, 若 $a > 0$, 由函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 得 $\frac{\pi}{2}a \leq \pi$, 解得 $a \leq 2$, 又 $a \in \mathbf{Z}$, 所以 $a = 1$ 或 $a = 2$. 当 $a = 1$ 时, $f(x) = -2\cos x$, 则 $f(\frac{2\pi}{3}) = -2\cos \frac{2\pi}{3} = -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$; 当 $a = 2$ 时, $f(x) = -2\cos 2x$, 则 $f(\frac{2\pi}{3}) = -2\cos \frac{4\pi}{3} = -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$. 若 $a < 0$, 同理可得 $a = -1$ 或 $a = -2$, $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$. 综上, $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$.

专题 三角函数中 ω 的取值问题



题型上分练

1. D 【解析】由题意知, 函数 $f(x) = 1 + \tan(-\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega \neq 0$)

在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 根据正切函数的性质可得 $-\omega > 0$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, 可得 $-\omega x + \frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}, -\omega + \frac{\pi}{4})$, 则 $-\omega + \frac{\pi}{4} \leq$

$\frac{\pi}{2}$, 解得 $-\frac{\pi}{4} \leq \omega < 0$. 故选 D.

2. D 【解析】由题意得 $g(x) = \cos[\omega(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] =$

$\cos(\omega x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\omega}{3})$, 因为 $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\omega}{3} \in$

$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{6})$, 因为函数 $g(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减,

所以 $\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{6} \leq \pi$, 所以 $0 < \omega \leq 5$, 所以 ω 的最大值为 5. 故选

D.

3. C 【解析】依题意, $f(0) = \cos \varphi = \frac{1}{2}$, 而 $0 < \varphi < \pi$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x) = \cos(2\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$).

对任意 $x_1, x_2 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$,



则函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $2\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\pi\omega + \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$,

而余弦函数 $y = \cos x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$),

则 $\left(\pi\omega + \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \subseteq [2k\pi - \pi, 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$),

所以 $\begin{cases} \pi\omega + \frac{\pi}{3} \geq 2k\pi - \pi, \\ \frac{4\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{解得} \begin{cases} \omega \geq 2k - \frac{4}{3}, \\ \omega \leq \frac{3}{2}k - \frac{1}{4}, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{显然}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}k - \frac{1}{4} > 0, \\ 2k - \frac{4}{3} \leq \frac{3}{2}k - \frac{1}{4}, \end{cases}$ 即 $\frac{1}{6} < k \leq \frac{13}{6}$, 而 $k \in \mathbf{Z}$, 因此 $k = 1$ 或 $k =$

2, 所以 $\frac{2}{3} \leq \omega \leq \frac{5}{4}$ 或 $\frac{8}{3} \leq \omega \leq \frac{11}{4}$. 故选 C.

4. D 【解析】因为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $f\left(\frac{T}{12}\right) = f\left(\frac{\pi}{6\omega}\right) = \sin\left(\omega \cdot \frac{\pi}{6\omega} + \varphi\right)$

关键点

$= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$,

又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 又 $f(x)$ 在区间

$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增, $\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3} \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{3}$, 而正弦函

数 $y = \sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, 故

$\begin{cases} \frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3} \geq 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{解得 } 12k - 5 \leq \omega \leq 8k + \frac{2}{3}, k \in \mathbf{Z}.$

令 $k = 0$, 得 $-5 \leq \omega \leq \frac{2}{3}$, 又 $\omega > 0$, 所以 $0 < \omega \leq \frac{2}{3}$; 令 $k = 1$, 得

$7 \leq \omega \leq \frac{26}{3}$; 当 $k \geq 2$ 时, $12k - 5 - \left(8k + \frac{2}{3}\right) = 4k - \frac{17}{3} > 0$, 不合题

意. 综上, ω 的取值范围为 $\left(0, \frac{2}{3}\right] \cup \left[7, \frac{26}{3}\right]$. 故选 D.

5. D 【解析】因为 $f(x+1) = f(-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象的一

条对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = \pm 1$, 即 $\frac{1}{2}\omega +$

$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$, 又 $\omega > 0$, 所以

$k_1 \geq 0$, 即 $k_1 \in \mathbf{N}$ (易错: 注意题干只说了“单调”, 要考虑单调递增和单调递减两种情况).

①若 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增,

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

因为 $\omega > 0$, 所以 $\frac{1}{\omega}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \leq x \leq \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$,



$$\text{所以} \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \geq \frac{1}{\omega} \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right), \\ \frac{\pi}{12} \leq \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即} \begin{cases} \omega \leq \frac{8}{3} - 8k, \\ \omega \leq 4 + 24k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

又 $\omega > 0$, 故 $\frac{8}{3} - 8k > 0$ 且 $4 + 24k > 0$, 因为 $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k = 0$, $\omega \in$

$$\left(0, \frac{8}{3} \right]. \text{ 又 } \omega = \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{N},$$

所以当 $k_1 = 0$ 时, $\omega = \frac{2\pi}{3}$ 满足题意.

②若 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12} \right)$ 上单调递减,

$$\text{令 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

因为 $\omega > 0$, 所以 $\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \leq x \leq \frac{1}{\omega} \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z},$

$$\text{所以} \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \geq \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), \\ \frac{\pi}{12} \leq \frac{1}{\omega} \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right), \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即} \begin{cases} \omega \leq -\frac{4}{3} - 8k, \\ \omega \leq 16 + 24k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

又 $\omega > 0$, 故 $-\frac{4}{3} - 8k > 0$ 且 $16 + 24k > 0$, 由 $k \in \mathbf{Z}$, 此时无解.

综上所述, $\omega = \frac{2\pi}{3}$. 故选 D.

6. B 【解析】由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 及 $\omega > 0$, 可得 $\omega x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \right.$

$\left. \frac{\pi\omega}{2} - \frac{\pi}{6} \right]$. 根据其值域为 $[-1, 2]$, 且 $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$, 由正

弦函数的图象与性质可得 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi\omega}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \pi + \frac{\pi}{6}$, 解得 $\frac{4}{3} \leq$

$\omega \leq \frac{8}{3}$. 故选 B.

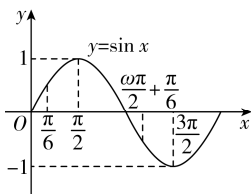
7. D 【解析】因为 $\omega > 0$, 所以当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\omega\pi + \right.$

$\left. \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$, 因为 $f(x)$ 恰有 3 个极值点, 所以 $-3\pi \leq -\omega\pi + \frac{\pi}{6} <$

-2π , 解得 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{19}{6}$, 即 ω 的取值范围为 $\left(\frac{13}{6}, \frac{19}{6} \right]$. 故选 D.



8. D 【解析】因为 $\omega > 0$, 所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{\pi}{6} < \omega x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{6}$, 因为 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有极大值, 但无极小值, 结合正弦函数 $y = \sin x$ 的图象, 得 $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{2}{3} < \omega \leq \frac{8}{3}$. 故选 D.



9. B 【解析】函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin \omega x + \frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2}$. 由 $x \in [0, 2\pi)$, 得 $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{4} \right)$, 依题意, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上既有最大值, 又有最小值, 突破点 因此 $2\pi\omega + \frac{\pi}{4} > \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\omega > \frac{5}{8}$, 所以 ω 的所有可能取值构成的集合为 $\left(\frac{5}{8}, +\infty \right)$. 故选 B.

10. B 【解析】由题意得 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\omega x + \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(\omega x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \omega x$.

因为 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = 1$, 所以 $f(x_1) + f(x_2) = 2$, 故 $f(x)$ 在

$\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right]$ 上有两个最大值点 (提示: $\sin \omega x$ 的最大值为 1).

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 令 $\omega x = t$, 则函数 $y = \sin t$ 在区间

$\left[\frac{3\omega\pi}{2}, \frac{5\omega\pi}{2} \right]$ 上至少存在两个最大值点, 则 $\frac{2\pi}{\omega} \leq \pi$, 解得

$\omega \geq 2$.

当 $2T = \frac{4\pi}{\omega} \leq \pi$, 即 $\omega \geq 4$ 时, 显然符合题意.

当 $2 \leq \omega < 4$ 时, 因为 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$, 所以 $\frac{3\omega\pi}{2} \leq \omega x \leq \frac{5\omega\pi}{2}$, 所以

$3\pi \leq \frac{3\omega\pi}{2} < 6\pi$, $5\pi \leq \frac{5\omega\pi}{2} < 10\pi$, 分以下两种情况讨论:

① 当 $\frac{3\omega\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{2}$, 即 $\omega \leq 3$ 时, $\frac{5\omega\pi}{2} \geq \frac{13\pi}{2}$, 即 $\omega \geq \frac{13}{5}$, 所以

$\frac{13}{5} \leq \omega \leq 3$;

② 当 $\frac{9\pi}{2} < \frac{3\omega\pi}{2} < 6\pi$, 即 $3 < \omega < 4$ 时, $\frac{5\omega\pi}{2} \geq \frac{17\pi}{2}$, 即 $\omega \geq \frac{17}{5}$, 所



以 $\frac{17}{5} \leq \omega < 4$.

综上, ω 的取值范围为 $\left[\frac{13}{5}, 3\right] \cup \left[\frac{17}{5}, +\infty\right)$, 故选 B.

11. $\left(\frac{13}{2}, \frac{19}{2}\right)$ 【解析】 $f(x) = 2\cos\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 (\omega > 0)$.

因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $2\omega x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$,

又函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上恰有 2 个极大值点和 1 个极

小值点, 即在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ 内 $y = \cos x$ 恰好取得 2

次最大值和 1 次最小值, 由余弦函数的图象可知 $2\pi < \frac{\pi\omega}{3} -$

$\frac{\pi}{6} \leq 3\pi$, 解得 $\frac{13}{2} < \omega \leq \frac{19}{2}$, 即 ω 的取值范围为 $\left(\frac{13}{2}, \frac{19}{2}\right]$.

12. B 【解析】由函数 $f(x) = \cos\left[\omega\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4}\right] (\omega > 0)$ 的图

象关于原点中心对称, 得 $-\frac{\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得

$\omega = -3k - \frac{3}{4}$. 因为 $\omega > 0$, 所以当 $k = -1$ 时, ω 取得最小值 $\frac{9}{4}$.

故选 B.

13. D 【解析】由方程 $|f(x)| = \left|\sqrt{2}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$,

可得 $\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{4} = k\pi \pm \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$,

当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, 2\omega\pi + \frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $\omega x + \frac{\pi}{4}$ 的可能取值为 $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \dots$,

因为原方程在区间 $(0, 2\pi)$ 上恰有 5 个实根,

所以 $\frac{11\pi}{4} < 2\omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{13\pi}{4}$, 解得 $\frac{5}{4} < \omega \leq \frac{3}{2}$,

即 ω 的取值范围是 $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$. 故选 D.

14. B 【解析】函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{12}\right) (\omega > 0)$ 的最小正周期

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, 由于函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{12}\right) (\omega > 0)$ 在 $[a, a+4]$ 上

至少有五个不同的零点(提示: 出现至少几个零点可从周期

考虑), 故需满足 $\frac{5}{2}T \leq a+4-a$, 即 $\frac{5}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} \leq 4$, 所以 $\omega \geq \frac{5\pi}{4}$,

即 ω 的最小值为 $\frac{5\pi}{4}$. 故选 B.

15. B 【解析】当 $x > 0$ 时, 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 在 $(0, +\infty)$ 上

单调递增, $f(2) = \ln 2 - 2 < 0$, $f(3) = \ln 3 > 0$, 则函数 $f(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上有唯一零点.

依题意, 当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 有 3 个零点,



当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, 又 $\omega > 0$, 则 $-\omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$, 因此 $-3\pi < -\omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq -2\pi$, 解得 $\frac{7}{3} \leq \omega < \frac{10}{3}$, 所以正数 ω 的取值范围是 $\left[\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$. 故选 B.

16. D 【解析】 $f(x) = \cos(\omega x + \pi) - 2\sqrt{3} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}$

$$= -\cos \omega x - 2\sqrt{3} \times \frac{1 - \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{由 } 0 \leq x \leq \pi, \text{ 得 } -\frac{\pi}{6} \leq \omega x - \frac{\pi}{6} \leq \pi\omega - \frac{\pi}{6},$$

由于 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上有且只有 1 个零点,

$$\text{所以 } 0 \leq \pi\omega - \frac{\pi}{6} < \pi, \text{ 解得 } \frac{1}{6} \leq \omega < \frac{7}{6}.$$

$$\text{由 } -\frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \text{ 得 } -\frac{2\pi\omega}{5} - \frac{\pi}{6} \leq \omega x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi\omega}{4} - \frac{\pi}{6},$$

因为 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } \begin{cases} -\frac{2\pi\omega}{5} - \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{3\pi\omega}{4} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \omega \leq \frac{5}{6}, \text{ 则 } \frac{1}{6} \leq \omega \leq \frac{5}{6}.$$

故选 D.

17. D 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 令 $2\sin \omega x = 1$, 则

$$\sin \omega x = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \omega x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 或 } \omega x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{则 } x = \frac{\pi}{6\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z} \text{ 或 } x = \frac{5\pi}{6\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z}. \text{ 所以相邻交点最}$$

$$\text{小的距离为 } \frac{5\pi}{6\omega} - \frac{\pi}{6\omega} = \frac{2\pi}{3\omega}, \text{ 最大距离为 } \frac{\pi}{6\omega} + \frac{2\pi}{\omega} - \frac{5\pi}{6\omega} = \frac{4\pi}{3\omega}, \text{ 由}$$

$y = f(x)$ 的图象在长度为 π 的任意闭区间上与直线 $y = 1$ 最少有 3 个交点, 最多有 4 个交点, 故相邻 4 个交点对应的最大距离不大于 π , 相邻 5 个交点对应的最小距离大于 π , 又

$$f(x) \text{ 在两个最小正周期 } T \text{ 的距离 } \frac{4\pi}{\omega} \text{ 内与直线 } y = 1 \text{ 最多 5}$$

个交点(提示: 由相邻交点最小/最大距离限定周期范围),

$$\text{所以 } \frac{4\pi}{3\omega} + \frac{2\pi}{3\omega} + \frac{4\pi}{3\omega} = \frac{10\pi}{3\omega} \leq \pi, \text{ 且 } 2T = \frac{4\pi}{\omega} > \pi, \text{ 所以 } \frac{10}{3} \leq \omega < 4.$$

故选 D.

18. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 【解析】当 $x \in (-\pi, \pi)$, $\omega > 0$ 时, $\omega x - \frac{\pi}{3} \in$

$$\left(-\omega\pi - \frac{\pi}{3}, \omega\pi - \frac{\pi}{3}\right),$$

由函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上有且仅有 1 个零点和 1 条对

$$\text{称轴, 得 } \left| -\omega\pi - \frac{\pi}{3} \right| > \left| \omega\pi - \frac{\pi}{3} \right|,$$



$$\text{则} \begin{cases} -\pi \leq -\omega\pi - \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{2}, \\ 0 < \omega\pi - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \leq -\omega\pi - \frac{\pi}{3} < -\pi, \\ -\frac{\pi}{2} < \omega\pi - \frac{\pi}{3} \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \frac{1}{6} < \omega \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{3} < \omega \leq \frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} < \omega \leq \frac{7}{6}, \\ -\frac{1}{6} < \omega \leq \frac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{则} \frac{1}{3} < \omega \leq \frac{2}{3},$$

所以实数 ω 的取值范围是 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

真题风向练

19. C 命题点 ①辅助角公式、三角函数的性质

【解析】 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x = \sqrt{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$. $\because f(x + \pi) = f(x)$ 恒成立, $\therefore \pi$ 是 $f(x)$ 的一个周期 (提示: π 不一定是最小正周期), $\therefore \pi = \frac{m \cdot 2\pi}{\omega} (m \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\omega = 2m (m \in \mathbf{N}^*)$.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $2mx + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right]$. $\because f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点, $\therefore \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \geq \pi$, 即 $m \geq \frac{3}{2}$. 又 $m \in \mathbf{N}^*$, $\therefore$ 当 $m=2$ 时, ω 取得最小值, 最小值为 4, 故选 C.

第 1 章 真题综合测试

题组 1

1. C 命题点 ①诱导公式, 集合的交集运算

【解析】 $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 所以集合 $A = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, 所以 $A \cap B = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$. 故选 C.

2. A 命题点 ①三角恒等变换

【解析】由 $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 可得 $\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 2$, 即 $\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$. 由 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = m$, 可得 $\cos \alpha \cos \beta = -m$, $\sin \alpha \sin \beta = -2m$, 所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -3m$. 故选 A.

3. B 命题点 ①同角三角函数的基本关系、两角和的正切公式

【解析】 $\because \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}$, $\therefore \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = 2\sqrt{3} - 1$. 故选 B.

4. B 命题点 ①三角函数的图象与性质

【解析】 $\because f(x_1) = -1, f(x_2) = 1$, $\therefore x_1, x_2$ 分别为函数 $f(x)$ 的最



小值点、最大值点. 又 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{\pi}{2}$, 得 $\omega = 2$.

故选 B.

5. C 命题点 三角函数的图象变换、诱导公式

【解析】 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 的图象向 x 轴的正方向平移 3φ 个单位长度, 得到函数 $g(x) = \sin(x - 2\varphi)$ 的图象, 由题意, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 x 轴对称, 因此 $f(x) = -g(x)$ 对任意实数 x 恒成立, 即 $\sin(x + \varphi) = -\sin(x - 2\varphi) = \sin(-x + 2\varphi)$ 恒成立, 显然 $x + \varphi = -x + 2\varphi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 不恒成立, 故只有 $(x + \varphi) + (-x + 2\varphi) = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ (提示: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$), 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$, 又 $0 < \varphi < 2\pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$, 即 φ 的取值个数为 3. 故选 C.

一题多解 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 的最小正周期 $T = 2\pi$, 图象平移不改变周期性, 根据正弦曲线的特征, 要使平移后的图象与 $f(x)$ 的图象关于 x 轴对称, 则需平移 $\frac{1}{2}T + kT (k \in \mathbf{Z})$ 个单位长度, 因此 $3\varphi = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$, 又 $0 < \varphi < 2\pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$, 即 φ 的取值个数为 3. 故选 C.

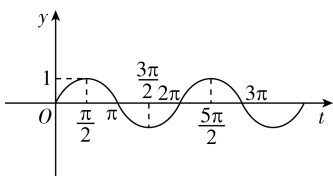
6. B 命题点 正切型函数的图象与性质

【解析】 正切函数 $y = \tan x$ 图象的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbf{Z})$. 由点 $(a, 0) (a > 0)$ 是函数 $y = 2\tan(x - \frac{\pi}{3})$ 的图象的一个对称中心, 可知 $a - \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $a = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$. 由 $a > 0$ 可得, 当 $k = 0$ 时, a 取得最小值 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

快解 若 $a = \frac{\pi}{6}$, 因为 $\tan(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{6}) \neq 0$, 所以 a 不能取 $\frac{\pi}{6}$; 若 $a = \frac{\pi}{3}$, 因为 $\tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 0$, 所以 a 能取 $\frac{\pi}{3}$; 若 $a = \frac{\pi}{2}$, 因为 $\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{6} \neq 0$, 所以 a 不能取 $\frac{\pi}{2}$; 若 $a = \frac{4\pi}{3}$, 因为 $\tan(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 0$, 所以 a 能取 $\frac{4\pi}{3}$. 因为 $\frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, 所以 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

7. C 命题点 正弦型函数的图象及性质

【解析】 由题知 $\omega > 0$, 又因为 $0 < x < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{3} < \omega x + \frac{\pi}{3} < \omega\pi + \frac{\pi}{3}$. 设 $t = \omega x + \frac{\pi}{3}$, 作 $y =$





$\sin t$ 的部分图象, 如图所示. 要满足函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上恰有三个极值点、两个零点, 则 $\frac{5\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi$ (易错: 因为 $0 < x < \pi$, 所以左端不可以取等, 右端可以取等), 解得 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}$.

故选 C.

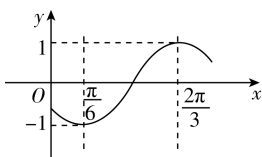
8. D 命题点 ① 正弦型函数的图象与性质

【解析】由题意画出 $f(x)$ 图象的简图(如图).

因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区

间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增, 且直线

$x = \frac{\pi}{6}$ 和直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y = f(x)$



的图象的两条对称轴, 所以 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{T}{2}$, 所以 $T = \pi$, 即 $|\omega| =$

$\frac{2\pi}{T} = 2$, 则 $\omega = 2$ 或 -2 . 而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$ (提示: $\frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的

极小值点), 即 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -1$ 或 $\sin\left(-2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -1$, 所

以 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 或 $-2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi =$

$-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 或

$f(x) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) =$

$\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选

D.

9. AC 必刷题型 ② 辅助角公式、正弦函数的图象及性质

【解析】 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \sin(2x + \pi)$$

$$= -\sqrt{2} \sin 2x.$$

对于 A, $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cos 2x$, 易知为偶函

数, 故 A 正确;

对于 B, $f(x) = -\sqrt{2} \sin 2x$ 的图象的对称轴方程为 $2x = \frac{\pi}{2} +$

$k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 故 B 错误;

对于 C, $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $2x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, 又 $y = \sin 2x$ 在

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 则 $f(x) = -\sqrt{2} \sin 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单

调递增, 故 C 正确;



对于 D, 因为 $f(x) = -\sqrt{2} \sin 2x$, $\sin 2x \in [-1, 1]$, 所以 $f(x) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 故 D 错误. 故选 AC.

10. AD 命题点 ① 正弦型三角函数的图象与性质

【解析】因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 所

以 $\sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0$, 则 $\frac{4\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 结合 $0 < \varphi < \pi$, 得

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

对于 A, 由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得 $k\pi -$

$\frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k = 0$ 时, $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$. 因为

$\left(0, \frac{5\pi}{12}\right) \subseteq \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上单

调递减, 故 A 正确.

对于 B, 由 $2x + \frac{2\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$, 当

$k = 0$ 时, $x = -\frac{\pi}{12}$; 当 $k = 1$ 时, $x = \frac{5\pi}{12}$; 当 $k = 2$ 时, $x = \frac{11\pi}{12}$, 所以函

数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 上只有一个极值点, 故 B 不正确.

对于 C, 由选项 B 的分析知, 函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程为

$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$, 而方程 $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ 无解, 故 C

不正确 (另解: 因为 $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\pi = 0$, 所

以直线 $x = \frac{7\pi}{6}$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴, 故 C 不正确).

对于 D, $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 若直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 为曲线 $y =$

$f(x)$ 的切线, 则由 $2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = -1$ 得 $2x + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

$(k \in \mathbf{Z})$ 或 $2x + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 或

$x = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$. 当 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则由 $\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$\frac{\sqrt{3}}{2} - k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $k = 0$; 当 $x = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x) =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 方程 $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 无解. 综上所述, 直线 $y =$

$\frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 为曲线 $y = f(x)$ 的切线, 故 D 正确. 故选 AD.

11. ABD 必刷题型 ① 含绝对值的三角函数问题

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \sin|-x| + |\sin(-x)| = \sin|x| + |\sin x| = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sin x + |\sin x|$, 则 $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + |\sin(x + 2\pi)| = \sin x + |\sin x| = f(x)$ (突破口 1: 确定奇偶性

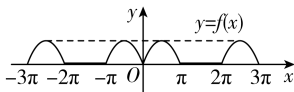


和周期性,缩小范围,化繁为简),

当 $0 < x \leq \pi$ 时, $f(x) = \sin x + \sin x = 2\sin x$,

当 $\pi < x \leq 2\pi$ 时, $f(x) = \sin x - \sin x = 0$ (突破口 2: 当 $0 < x \leq 2\pi$ 时, 要去掉绝对值符号需要分两类),

所以函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



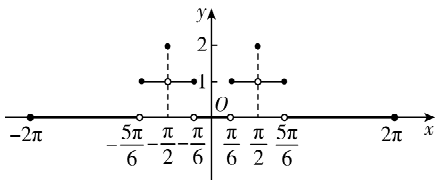
由 $g(x) = [f(x)]$ 可知, 对 $x \geq 0$, $g(x+2\pi) = [f(x+2\pi)] = [f(x)] = g(x)$,

当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$ 时, $g(x) = 2$;

当 $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$, 且 $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$ 时, $g(x) = 1$;

当 $2k\pi \leq x < 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi + \frac{5\pi}{6} < x < 2k\pi + 2\pi$, $k \in \mathbf{N}$ 时, $g(x) = 0$.

因为 $g(-x) = [f(-x)] = [f(x)] = g(x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 则函数 $g(x)$ 的大致图象如图所示.



由函数 $g(x)$ 的图象得到 $g(x)$ 不是周期函数, 故 **A** 正确.

函数 $g(x)$ 的值域是 $\{0, 1, 2\}$, 故 **B** 正确.

因为 $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left[f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = [\sqrt{2}] = 1$, $g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left[f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = [0] = 0$, 所以函数 $g(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 **C** 不正确.

对于方程 $\frac{\pi}{2}g(x) = x$, 当 $g(x) = 0$ 时, $x = 0$, 方程有 1 个实数根; 当 $g(x) = 1$ 时, $x = \frac{\pi}{2}$, 此时 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \neq 1$, 方程没有实数根; 当 $g(x) = 2$ 时, $x = \pi$, 此时 $g(\pi) = 0 \neq 2$, 方程没有实数根, 所以方程 $\frac{\pi}{2}g(x) = x$ 只有 1 个实数根, 故 **D** 正确.

故选 ABD.

12.1 $-\sqrt{2}$ 命题点 ④ 两角差的正弦公式、三角函数的零点

【解析】依题意得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 0$, 解得 $A = 1$.

题眼

所以 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}$.



13. $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ (答案不唯一) **命题点** ①两角和与差的正、余弦公式

【解析】由 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$, 得 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \Rightarrow \cos \alpha \sin \beta = 0$. ①

由 $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos(\alpha-\beta)$, 得 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \neq \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha \sin \beta \neq 0$. ②

由①②得 $\sin \beta \neq 0, \cos \alpha = 0$, 且 $\sin \alpha \neq 0$, 所以 α 可取 $\frac{\pi}{2}$ 或

$\frac{3\pi}{2}$, β 可取 $(0, 2\pi)$ 内除 π 外的任意角.

14. 3 **命题点** ①三角函数的解析式、性质、零点

【解析】由已知得 $f(T) = f\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} + \varphi\right) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又

题眼

$0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$. 因为 $x = \frac{\pi}{9}$

为 $f(x)$ 的零点, 所以 $\frac{\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ (提示: 根据

$x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点求出 ω 取值的集合), 解得 $\omega = 9k + 3$,

$k \in \mathbf{Z}$. 又 $\omega > 0$, 所以 ω 的最小值为 3.

15. 2 **命题点** ①函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的图象和性质

【解析】设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由图象可知, $\frac{3}{4}T =$

$\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$, 所以 $T = \pi = \frac{2\pi}{|\omega|}$, 所以 $\omega = \pm 2$. 当 $\omega = 2$ 时, 把

点 $\left(\frac{13\pi}{12}, 2\right)$ 的坐标代入 $f(x)$ 的解析式, 得

$2\cos\left(\frac{13\pi}{12}\omega + \varphi\right) = 2\cos\left(\frac{13\pi}{12} \times 2 + \varphi\right) = 2$, 所以 $\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$,

$k \in \mathbf{Z}$, 则 $f(x) = 2\cos(2x + \varphi) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 当 $\omega = -2$ 时,

将点 $\left(\frac{13\pi}{12}, 2\right)$ 的坐标代入 $f(x)$ 的解析式, 得

$2\cos\left(\frac{13\pi}{12}\omega + \varphi\right) = 2\cos\left[\frac{13\pi}{12} \times (-2) + \varphi\right] = 2\cos\left(\frac{13\pi}{12} \times 2 - \varphi\right) = 2$, 所

以 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$, 则 $f(x) = 2\cos(2x - \varphi) =$

$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$. 综上得 $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 所以

$f\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = 2\cos\left[2 \times \left(-\frac{7\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 1, f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{4\pi}{3} -$

$\frac{\pi}{6}\right) = 0$, 所以 $(f(x) - 1)f(x) > 0$, 所以 $f(x) < 0$ 或 $f(x) > 1$, 所

以 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < 0$ 或 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x -$

$\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\frac{\pi}{3} +$



$k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以当 $k=0$ 时,

x 能取到的最小正整数为 2.

16. 必刷题型 ⊙ 正弦型函数的值域、已知三角函数的单调性求参数最值

【解】(1) 由题意可知 $f(x) = 4\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) \cos \omega x + m$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega x + \frac{1}{2}\sin \omega x\right) \cos \omega x + m$$

$$= 2\sqrt{3}\cos^2 \omega x + 2\sin \omega x \cos \omega x + m$$

$$= \sin 2\omega x + \sqrt{3}\cos 2\omega x + m + \sqrt{3}$$

$$= 2\sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + m + \sqrt{3},$$

因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 且 $\omega > 0$, 则 $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$, 可得

$$\omega = 1, \text{ 即 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + m + \sqrt{3},$$

又因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin \pi + m + \sqrt{3} = m + \sqrt{3} = 0$, 所以 $m = -\sqrt{3}$, 所

$$\text{以 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

由 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 可得 $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, 可得

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 即 $f(x) \in [-1, 2]$, 所以 $f(x)$ 在

$x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 的值域为 $[-1, 2]$.

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数

$$g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

的图象, 若 $f(x_1) - f(x_2) > g(x_2) - g(x_1)$, 即 $f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$ (提示: 将相同变量移到不等号同侧, 从而得到函数的

单调性), 且 $x_1, x_2 \in \left[t, \frac{3\pi}{4}\right], x_1 < x_2$, 设函数 $h(x) = f(x) +$

$$g(x), \text{ 则 } h(x) \text{ 在 } \left[t, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ 内单调递减, } h(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) +$$

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin 2x, \text{ 由 } x \in \left[t, \frac{3\pi}{4}\right], \text{ 得 } 2x \in \left[2t, \frac{3\pi}{2}\right], \text{ 可}$$

得 $\frac{\pi}{2} \leq 2t < \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4}$, 所以 t 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$.

题组 2

1. A 命题点 ⊙ 正弦型函数的单调区间

【解析】 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq$

$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以函数 $f(x) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间



为 $\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$, 所以 **B, C, D** 错误, **A** 正确.

故选 **A**.

快解

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $-\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故 **A** 正确.

2. D 命题点 ②二倍角公式

【解析】 因为 $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 所以 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$. 又因为 α 为锐角, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 为锐角, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 故选 **D**.

3. BC 命题点 ③三角函数的图象与性质

【解析】 对于 **A**, 令 $f(x) = 0$, 则 $2x = k_1\pi (k_1 \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{k_1\pi}{2} (k_1 \in \mathbf{Z})$, 令 $g(x) = 0$, 则 $2x - \frac{\pi}{4} = k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2} (k_2 \in \mathbf{Z})$, 因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无相同零点, 故 **A** 错误;

对于 **B**, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大值都为 1, 故 **B** 正确;

对于 **C**, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期都是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 **C** 正确;

对于 **D**, 令 $2x = \frac{\pi}{2} + k_3\pi (k_3 \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k_3\pi}{2} (k_3 \in \mathbf{Z})$, 令 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k_4\pi (k_4 \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k_4\pi}{2} (k_4 \in \mathbf{Z})$, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象无相同的对称轴, 故 **D** 错误. 故选 **BC**.

一题多解

由题可得 $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 则将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 个单位长度可以得到函数 $g(x)$ 的图象. 显然, 图象的左右平移变换不改变原相应函数的周期和最值, 故 **B, C** 正确; 又平移的长度不是半个周期的整数倍, 所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的对称中心和对称轴不会重合, 故 **A, D** 错误. 故选 **BC**.

4. C 必刷题型 ④弧长的有关计算、三角恒等变换

【解析】 设圆 O 的半径为 r , 由题意得 $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$, 且圆

O 的半径为 $r = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$, 所以 $\angle AOB = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$,

所以 $\tan \beta = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{1 - 2\sqrt{2}} =$



$$-\frac{(2\sqrt{2}+1)^2}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)} = -\frac{9+4\sqrt{2}}{7}. \text{ 故选 C.}$$

5. B 命题点 ①两角和与差的正弦公式及二倍角的余弦公式

【解析】 $\because \sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}, \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6},$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{3} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \cos(2\alpha+2\beta) = \cos[2(\alpha+\beta)] = 1 - 2\sin^2(\alpha+\beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \text{ 故选 B.}$$

6. C 命题点 ①三角恒等变换、二倍角公式

【解析】因为 $\frac{\sin \theta(1+\sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin \theta(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta + \cos \theta} = \sin \theta(\sin \theta +$

$$\cos \theta) = \frac{\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \text{ (提示: 也可利用 } \sin \theta = -2\cos \theta \text{ 化为}$$

$$\text{正弦或余弦求解}) = \frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1} = \frac{\tan^2 \theta + \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{4-2}{4+1} = \frac{2}{5}, \text{ 故选}$$

C.

一题多解

由 $\tan \theta = -2$ 得 $\sin^2 \theta = \frac{4}{5}, \sin \theta \cdot \cos \theta = -\frac{2}{5}$. 故

$$\frac{\sin \theta(1+\sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin \theta(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta + \cos \theta} = \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5},$$

故选 C.

7. A 命题点 ①二倍角公式及同角三角函数的基本关系

【解析】因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0. \tan 2\alpha =$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{1-2\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2-\sin \alpha}, \text{ 化简得 } \sin \alpha = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } \cos \alpha =$$

$$\frac{\sqrt{15}}{4}, \text{ 所以 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{15}, \text{ 故选 A.}$$

8. A 命题点 ①三角函数的图象与性质

【解析】因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 所以

$$b=2, \text{ 且 } \sin\left(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ 所以 } \frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \omega =$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbf{Z}. \text{ 又 } \frac{2\pi}{3} < T < \pi, \text{ 则 } 2 < \omega < 3, \text{ 解得 } \omega = \frac{5}{2}. \text{ 所以}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2, \text{ 从而 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + 2 = 1. \text{ 故选 A.}$$

9. BC 命题点 ①三角函数的图象、性质及其解析式

【解析】由图可知, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \pi$, 得



$\omega = \pm 2$, 故 A 错误.

当 $\omega = 2$ 时, 将 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 的坐标代入 $y = \sin(2x + \varphi)$, 得 $2 \times \frac{\pi}{6} +$

$\varphi = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

当 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 则 $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + 2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$, 故 B 正确.

$y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 故 C 正确.

$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + 2x - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right)$, 故 D 错误. 故选 BC.

关键点拨 利用三角函数图象的周期性求出参数 ω , 代入特殊点求出参数 φ , 再根据诱导公式判断函数解析式的不同形式.

10. A 命题点 ① 正弦型函数的图象与性质

【解析】因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增, 所以 $\frac{\pi}{12} -$

$\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \leq \frac{T}{2}$, 即 $0 < \omega \leq 2$.

因为直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴, $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心,

所以 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{T}{4} + \frac{k_1 T}{2} (k_1 \in \mathbf{N})$, 即 $\omega = 2(1 + 2k_1) (k_1 \in \mathbf{N})$,

故 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$

(提示: $\frac{\pi}{12}$ 是单调递增区间的右端点, 故 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$), 故

$\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$.

因为 $-\pi < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 即 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$,

所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

故当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

11. ABD 必刷题型 ② 三角函数图象与性质的综合应用

【解析】由题图可得 $A = 2$, 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 2 \times$

$\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi$, 又 $\omega > 0$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 则 $f(x) = 2\cos\left(2x + \right.$



$\varphi)$, 由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = -2$ 得 $\varphi + \frac{2\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故 **A** 正

确.

由 **A** 选项的分析, 得 $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$

$2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点

$\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称, 故 **B** 正确.

令 $2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq k\pi - \frac{\pi}{6}$,

$k \in \mathbf{Z}$, 故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为

$\left[-\frac{2\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$; 令 $2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi, k \in$

$\mathbf{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 故函数 $f(x)$ 的单调递减

区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$, 则函数 $f(x)$ 在区间

$\left[-\frac{11\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增,

故 **C** 错误.

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, a\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2a + \frac{\pi}{3}\right)$, 要使 $f(x)$ 在区

间 $\left[-\frac{\pi}{12}, a\right)$ 上恰有一个最大值 2 和一个最小值 -2, 需使

$2\pi < 2a + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi$, 解得 $\frac{5\pi}{6} < a \leq \frac{4\pi}{3}$, 故 **D** 正确. 故选 **ABD**.

12. [2, 3] 命题点 三角函数的零点问题

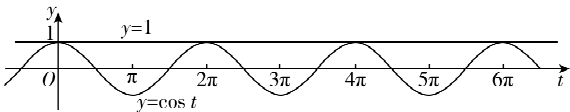
【解析】 令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0$, 得 $\cos \omega x = 1$, 又 $x \in [0, 2\pi]$,

则 $\omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 令 $t = \omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$

有且仅有 3 个零点, 所以 $y = \cos t$ 的图象与直线 $y = 1$ 在 $[0,$

$2\omega\pi]$ 有且仅有 3 个交点, 如图, 所以 $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 解得

$2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取值范围是 $[2, 3)$.



一题多解 令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0 (\omega > 0)$, 得 $\cos \omega x = 1$, 即

$\omega x = 2k\pi (\omega > 0), k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{2k\pi}{\omega} (\omega > 0), k \in \mathbf{Z}$. 因为

$f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 且 $f(0) = 0$, 所以

$f(x)$ 的 3 个零点对应 $k = 0, 1, 2$, 所以 $f\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = f\left(\frac{4\pi}{\omega}\right) = 0$ 且

$\frac{4\pi}{\omega} \leq 2\pi < \frac{6\pi}{\omega}$, 解得 $2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取值范围是 $[2, 3)$.

13. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **命题点** ①同角三角函数的基本关系、两角和的正切

公式

【解析】 $\because \tan \alpha + \tan \beta = 4, \tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1,$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

$$\therefore 2k_1\pi < \alpha < 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z}, 2k_2\pi + \pi < \beta < 2k_2\pi + \frac{3\pi}{2}, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore 2(k_1 + k_2)\pi + \pi < \alpha + \beta < 2(k_1 + k_2)\pi + 2\pi, k_1, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) < 0.$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta), \\ \sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1, \end{cases} \therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

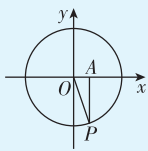
一题多解 (任意角的三角函数) 由题可得, α 为第一象限角, β 为第三象限角, 所以 $\alpha + \beta$ 为第三象限角或第四象限角或 y 轴负半轴上, 又

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -2\sqrt{2}, \text{ 所以 } \alpha +$$

 β 为第四象限角. 设角 $\alpha + \beta$ 的始边为 x 轴非负半轴, 终边与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的交点为 P , 则 $OP = 1, |\tan(\alpha + \beta)| =$

$$\frac{PA}{OA} = 2\sqrt{2}, \text{ 结合勾股定理得 } PA = \frac{2\sqrt{2}}{3}, OA = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \sin(\alpha +$$

$$\beta) = -\frac{PA}{OP} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

**易错警示** α, β 范围中的 k 并不一定相同, 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 时, 一定要先求出 $\alpha + \beta$ 的范围.14. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **命题点** ②三角函数的图象与性质【解析】设 $A(x_1, \frac{1}{2}), B(x_2, \frac{1}{2})$, 由五点作图法可得

$$\begin{cases} \omega x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}, & \text{①} \\ \omega x_2 + \varphi = \frac{5\pi}{6}. & \text{②} \end{cases} \quad \text{②} - \text{①}, \text{ 得 } \omega(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3}. \text{ 因为 } |AB| = \frac{\pi}{6},$$

所以 $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\omega = 4$. 因为函数 $f(x)$ 的图象经过点

$$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \text{ 所以 } f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{3} + \varphi\right) = 0, \text{ 所以 } \frac{8\pi}{3} + \varphi = 2k\pi,$$

 $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 由题图可知 $-1 < f(0) < 0$, 即

$$-1 < \sin \varphi < 0, \text{ 所以取 } k = 1, \text{ 则 } \varphi = -\frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } f(x) =$$

$$\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right), \text{ 所以 } f(\pi) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

15. **必刷题型** ③三角函数的综合应用(1) 【解】由题意可得 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$,



故 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$.

又 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cos \varphi = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$,

由于 $\varphi \in (0, \pi)$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x \in (0, m)$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, 2m + \frac{\pi}{3}\right)$ (提示: 整体代换),

由于 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上有最大值、无最小值,

故 $\frac{\pi}{2} < 2m + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{\pi}{12} < m \leq \frac{7\pi}{12}$,

故实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$.

(2) 【证明】 $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2,$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

故直线 l 的方程为 $y = 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

令 $g(x) = 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$,

则 $g'(x) = 2 - 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$,

故 $g(x)$ 在定义域内单调递增,

又 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$, 因此 $g(x)$ 有唯一的零点 $-\frac{\pi}{6}$,

故 l 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一的公共点.